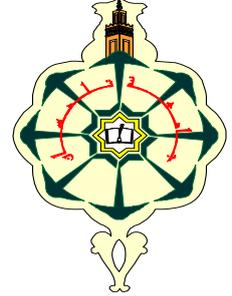
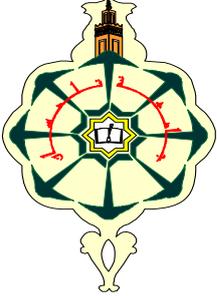


الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



UNIVERSITE ABOU BAKR BELKAÏD- TLEMEN

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

*Laboratoire d'Automatique (LAT)*

# Synthèse des Activités de Recherche

**HABILITATION UNIVERSITAIRE DE**

**Mr CHIKHAOUI Abdelhak**

*Année Universitaire  
2012-2013*

## I - Introduction

Les travaux présentés ici, ont été effectués au sein de l'équipe "Approximation et Stabilité des Systèmes Non linéaires" du laboratoire d'Automatique de l'université de Tlemcen.

La synthèse de douze années de recherche est présentée maintenant afin de mettre clairement en évidence ma contribution scientifique. Les travaux de recherche présentés s'orientent autour d'un axe principale basé sur la **Modélisation suivant deux aspects un théorique et l'autre numérique**:

### **Approximation et étude de la stabilité des systèmes non-linéaires**

Un très grand nombre de problèmes de la physique mathématique peuvent être "Modélisés" par des équations aux dérivées partielles ou équations différentielles ordinaires. Par modèle, nous entendons un ensemble d'équations (ou inéquations) qui, jointes à des conditions au limite et, lorsque le phénomène est dévolution, à des conditions initiales, permet de définir l'état du système. C'est ce qu'on appelle aussi la modélisation par systèmes distribués.

Naturellement l'écriture d'un modèle (un phénomène pouvant être souvent décrit, dans des conditions pas toujours équivalentes, par des variables d'états différentes) est une étape importante mais non décisive.

Encore faut-il pouvoir étudier le modèle, i.e en déduire des propriétés qualitatives ou quantitatives qui:

1-redonnent dans des conditions simples, les observations faites (les mesures).

2-donnent des informations supplémentaires sur le système.

On s'est aperçu depuis longtemps que la plupart des phénomènes de la physique mathématique sont non-linéaires, les cas parmi les plus célèbres étant l'équation de Boltzmann en mécanique statistique. Les équations de Navier- Stokes en mécanique des fluides.

Ainsi l'art du physicien est de faire des approximations adroites pour ramener un problème que l'on ne sait pas traiter, à un problème susceptible d'avoir une solution analytique (exemple Galilée négligeant le frottement pour découvrir la persistance du mouvement uniforme).

Sur ces bases, nous pourrions aborder la grande question de l'analyse numérique de résultats provenant d'expériences, comme il existe des méthodes qui nous permettent de modéliser les phénomènes complexes à l'aide d'hypothèses afin de les relier à une loi ou modèle mathématique.

Certains problèmes physiques peuvent être directement modélisés (i.e sans approximation) par des équations linéaires : c'est le cas de l'équation de transport des neutrons.

Notamment d'autres phénomènes peuvent être déduits de systèmes non-linéaires soit en négligeant certains termes (ce qui est valide dans certaines situations: (petits déplacements, mouvement...), soit par linéarisation autour d'une solution particulière.

Les progrès de l'analyse mathématique et, d'autre part, l'arrivée de l'outil de calcul numérique. L'arrivée, en effet; des ordinateurs, leurs progrès immenses et incessants, ont permis pour la première fois dans l'histoire de calculer, à partir des modèles, des quantités qui, jusqu'alors, ne pouvaient être que très approximativement estimées et peut-être par-dessus tout, de les calculer sûrement et rapidement, d'où la possibilité (fondamentale) pour les chercheurs et pour les ingénieurs, de pouvoir utiliser les résultats numériques pour la modification ou l'adaptation des raisonnements, les expériences ou des réalisations en cours.

Tout cela explique pourquoi, dans des sujet divers, la modélisation par les équations suivie de l'analyse théorique, puis numérique, suivie à son tour de la confrontation à l'expérience, est une démarche de base.

*La modélisation est également devenue le soutien des travaux de nombreuses disciplines (la physique, l'électronique, la chimie, la biologie, l'écologie, etc...).*

## II - Note historique sur la thématique de recherche

cette présentation a pour but de faire apparaître une thématique que j'ai entamé ces dernières années en collaboration avec les membres de mon équipe. Il s'agit de :

***L'Approximation et l'étude de la stabilité des systèmes non-linéaires (systèmes dynamiques modélisés par des équations différentielles ordinaires dépendant d'un paramètre).***

Lorsque nous voulons prédire ou décrire un phénomène physique concret, nous pouvons généralement passer par un modèle analytique où les différentes grandeurs sont exprimées par des indéterminées (valeurs abstraites) et les lois de la physique par des fonctions, dans la mesure où elles sont connues (le cas échéant, nous pouvons faire une hypothèse et la tester). En mettant en équation un phénomène physique, nous traduisons la réalité en une expérience mathématique, virtuelle, selon certaines règles. Dont les équations différentielles représentent une bonne candidates pour la description de ce phénomène, depuis son invention au 17ème siècle, ces équation font partie des concepts qui assurent remarquablement la relation entre les mathématiques et les domaines de la science.

L'étude de ces équations est un domaine mathématique qui historiquement a fait l'objet de nombreuses recherches [1],[2],[3],[4],[5]..., est continue cependant de rester d'actualité, le fait qu'elle intéresse particulièrement des discipline, et continue cependant de rester d'actualité, par le fait qu'elle intéresse particulièrement des disciplines comme la mécanique, la physique et plus récemment la biologie, l'électronique, spécialité où de nombreux " modèles " conduisent à des équations du même type. Il convient de souligner que la plupart de ces équations sont

globalement de nature non- linéaire. Du fait que la description d'un système, à partir des lois régissant son fonctionnement, conduit souvent à un modèle non linéaire, la manipulation peut se révéler complexe. De ce fait il n'existe pas, en l'état actuel des choses, une théorie d'ensemble des équations non-linéaires. Pour ce faire, des calculs approchés basés sur la méthode des petites perturbations, des méthodes de linéarisation...etc., sont effectués concernant ces phénomènes, sur lesquels on dispose de très peu d'information.

parmi ces problèmes non-linéaires, une classe importante est modélisée par les équations différentielles non-linéaires de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Toutefois, dans de nombreux cas, il peut s'avérer que plusieurs systèmes peuvent admettre un domaine de comportement linéaire, la linéarité étant toujours une approximation de la réalité.

Dès lors, les méthodes de linéarisation jouent un rôle important dans l'étude des équations différentielles ordinaires non linéaires, dont on peut dire que tout système linéaire n'est jamais que le modèle simplifié d'un système non- linéaire que l'on veut ignorer. Bien entendu, un certain nombre de questions propres aux problèmes linéaires peuvent se généraliser aux problèmes non linéaires si, d'une part, les perturbations dues aux non-linéarités sont petites et, d'autre part, à la structure des problèmes linéarisés correspondants qui introduit assez de régularité.

Il est alors important de noter que l'étude de la stabilité d'un système non -linéaire est menée sur le système linéarisé, dont le problème de stabilité revêt une importance évidente;

en effet, en partant de l'hypothèse selon laquelle la stabilité d'un système constitue en principe une garantie qu'une perturbation ne conduira pas à une catastrophe [2].

Il s'agit donc d'un renseignement important. Mais, généralement, il n'existe pas une définition absolue de la stabilité. Elle a évolué de façon continue pendant le cours d'histoire, et a toujours été ajustée aux exigences spécifiques à des problèmes particuliers. Donc, il convient de souligner, en premier lieu, que le concept est relatif et dépend du système de référence employé [6].

S'inspirant de ces propositions et du théorème de Lagrange sur la stabilité de l'équilibre dans le cas où il y aurait une fonction de forces. Un apport majeur de Lyapunov et simultanément, de Poincaré, a été de donner des conditions de la validité de cette approximation, basée sur les propriétés des solutions du modèle linéarisé. Cette méthode permet de conclure localement sans avoir à donner de renseignements quantitatifs.

En fait, depuis l'apparition du célèbre mémoire de Lyapunov " Problème général de la stabilité du mouvement " en (1892) justifient et étendent les propriétés locales déduites du modèle linéarisé. L'un des résultats principaux est la première méthode de Lyapunov : si l'origine est asymptotiquement stable pour le linéarisé alors il est localement asymptotiquement stable pour le système non linéaire. Cependant elle ne donne aucun renseignement quantitatif sur le domaine de stabilité asymptotique. Cette lacune fut contournée par l'introduction des célèbres fonctions de Lyapunov : c'est la seconde méthode de Lyapunov. Plusieurs définitions et études ont été menées, certaines lui sont équivalentes, d'autres en différent dans certains cas particuliers. D'autre enfin, sans la contredire, ont pour intérêt de la préciser. On cite parmi eux I. Mlkin (1952), Hahn (1963), Lasalle et Lefschetz (1961), etc. Cependant, la détermination d'une fonction de Lyapunov constitue une difficulté majeure.

Plusieurs méthodes de recherche de cette fonction ont été proposées, méthode du gradient variable Schultz et Gibson (1962), Zoubov (1957); à partir des formes quadratiques Aizerman et Gantmacher (1964),....etc.

### III- Position de problème

S'agissant de l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre, la principale méthode est de considérer l'équation linéaire obtenue par dérivation au sens de Fréchet en ce point de la fonction non-linéaire définissant l'équation différentielle, c'est à dire

$$\frac{dx}{dt} = DF(\text{pt d'équilibre}), x(0) = x_0 \quad (2)$$

l'équation ainsi obtenue a le même comportement que l'équation non-linéaire dans le cas hyperbolique, quand les valeurs propres ne rencontrent pas l'axe des imaginaires, cette méthode ne permet pas de répondre, au problèmes de la stabilité dans les cas :

- 1) Impossibilité de situer les valeur propres par rapport à l'axe des imaginaires, en particulier si une ou plusieurs valeurs propres sont proches de cet axe.
- 2) Si l'équilibre est un centre pour l'équation linéaire, c'est-à-dire, s'il y a des valeurs propres imaginaires ou si 0 est valeur propre.
- 3) Si la fonction n'est pas assez régulière au voisinage du point stationnaire.
- 4) Parfois, dans le cas où le système linéarisé présente un noeud et quand la non-linéarité n'est pas assez petite.

Tous les problème que nous venons d'évoquer justifient amplement à nos yeux l'introduction et l'utilisation d'autres techniques, où méthode de calculs pour l'étude du comportement des solutions ainsi que la synthèse de la stabilité des équations différentielle ordinaires non-linéaires.

Dans le but d'améliorer la linéarisation par rapport aux techniques existantes, une nouvelle méthode de linéarisation, appelée dérivation optimale introduite par Benouaz et Arino d'un point d'équilibre. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés. S'agissant de l'étude de comportement des solutions d'une équation non linéaire autour d'un point singulier, la linéarisation classique ne permet pas de répondre dans les cas [7], [8], [9], [10], [11]. Il s'agit en fait d'une approximation globale, par opposition à la perturbation non linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de l'approximation linéaire classique au voisinage d'un point d'équilibre. L'approche suivie est de type optimisation au sens des moindres carrés.

La méthode consiste à déterminer une application linéaire qui approche l'équation non linéaire dans les mêmes conditions initiales. Elle est basée sur la minimisation au sens des moindres carrées de l'écart entre l'équation non linéaire et l'équation linéaire.

### IV-Travaux scientifiques réalisés

#### IV-1.Travaux de recherche avant thèse:

Commençons par mon mémoire de Fin d'Etude [12] dirigé par Mr. SEDDIKI Omar intitulé : *«Etude théorique de la propagation d'une impulsion laser dans un milieu dispersif»*. Présentée et soutenue publiquement en juillet 1996.

L'objectif de ce travail était l'étude de la propagation des impulsions à travers des milieux dispersifs non-linéaires telle qu'une fibre optique. Le but été essentiellement de mettre en évidence le phénomène d'élargissement temporel des impulsions dû à la dispersion de la vitesse de groupe des différentes fréquences contenues dans le spectre associé à l'impulsion. La propagation d'une impulsion femto seconde dans un milieu pourra donner lieu à des phénomènes complexes, chaque composante spectrale n'étant pas affectée de la même manière par la propagation. Il dispersera également les différentes composantes spectrales d'une impulsion ultracourte, affectant sa propagation de manière très significative. Ceci n'est qu'un des multiples effets possibles, l'interaction avec le milieu pouvant donner lieu à une multitude de phénomènes non-linéaire.

Parfois nous sentons le désir ardent pour aller apprendre les mathématiques derrière des images simulées par les moyens informatiques, et voir comment les idées mathématiques peuvent être appliquées aux problèmes de la science (physique, biologie...etc.). Ainsi, la science aussi bien que les mathématiques auront besoin d'être expliquées. Mais, ce devrait être important, et il peut être instructif de voir les rapports qui existent entre les mathématiques et les différents champs de la science. En particulier, les liens avec l'analyse numérique qui sont continus, et basées sur l'analyse des équations différentielles ordinaires non linéaires par des techniques d'approximation et de linéarisation capable de remplacer d'une façon satisfaisante les équations non linéaires initiales. Le but étant de construire des algorithmes numériques utilisés de plus en plus systématiquement, en se servant de l'ordinateur comme outil d'investigation. Ceci constitue l'idée générale du point de départ de mon mémoire de **Magister** [13] dirigé par Mr. BENOUAZ Tayeb intitulé :

« *Contribution à l' étude des systèmes Non linéaires* » .

Ce mémoire , nous a suggéré de tester et d'appliquer la nouvelle méthode de dérivation optimale introduite par (Benouaz-Arino), pour l'analyse de la stabilité de modèles physiques régis par des équations différentielles ordinaires non- linéaires.

Il y a lieu de noter que le présent travail ne prétend pas être exhaustif sur le thème de la stabilité, notre objectif est d'utiliser la méthode de dérivation optimale pour l'étude de la stabilité de certaines classes de modèles physiques en vue de tester et montrer la possibilité offerte par cette technique, pour la description du comportement réel de ces modèles, qui fournissent des comportements complexes d'une grande séduction.

En s'inspirant des perspectives proposées par les travaux de Benouaz [14], on s'est intéressé à:

L'étude d'une équation dépendant d'un paramètre, dans le cas où l'équation change de stabilité, c'est-à-dire, l'application de la méthode de dérivation optimale aux modèles physiques qui engendrent le phénomène de bifurcation.

L'approfondissement de la relation entre la stabilité asymptotique et la dérivée optimale.

L'utilisation d'une nouvelle approximation appelée "approximation optimale" basée sur la dérivée optimale, pour l'analyse des modèles physiques modélisés par des E.D.O non linéaires. L'objectif de ce travail été d'illustrer ses possibilités d'être un outil puissant et précis pour approcher les systèmes non linéaires par des systèmes linéaires adéquats et ceci à travers une étude comparative entre une autre technique basée sur la dérivation optimale appelée "approximation optimale" et quelques méthodes de linéarisation les plus couramment utilisées pour l'analyse de certaines classes de circuit électroniques non-linéaires (linéarisation classique, linéarisation par morceaux "méthode de lissage") .

Les travaux de Magister ont conduit à présenter plusieurs communications nationales et internationales avec comité de lecture.

Grâce à ma formation durant ma graduation (1995-1996), et au sein d'un laboratoire d'optoélectronique (2001-2002) pendant mon service militaire à l'EMP (Ecole Militaire Polytechnique) j'ai pu acquérir un certain bagage dans le domaine de l'optoélectronique et la manipulation des fibres optiques. j'ai collaboré à la réalisation du travail des mémoires de magister de:

- Mme Bouchenak Khaladi Nesrine intitulé: « Etude et Modélisation de la Propagation d'une Impulsion dans un Milieu Dispersif » soutenu en 2007 sous la direction de notre chef d'équipe Professeur Benouaz Tayeb. l'objectif étant: l'étude et modélisation de la propagation d'une impulsion dans un milieu dispersif. L'étude faite sur la dispersion chromatique dans une fibre optique ( en silice, et en silice dopée au germanium) et la simulation numérique de la propagation des Solitons dans une fibre optique monomode, nous a permis de conclure que:
  - 1- Le problème de dispersion pourrait être résolu en envoyant le signal à la longueur d'onde de dispersion zéro (dispersion presque nulle à cette longueur d'onde).
  - 2- Le choix du milieu dispersif et le régime de dispersion jouent un rôle important sur la propagation des impulsions lumineuses.
- Mme N. Boumaza intitulé: « Etude et Modélisation de la Propagation d'une Impulsion Non linéaire dans un Milieu Matériel » soutenu en 2008, sous la direction du Professeur Benouaz Tayeb. Ce travail est basé sur le développement de deux aspects :
  - 1- Un aspect théorique: Etude et modélisation de la propagation d'une impulsion lumineuse non linéaire dans un milieu matériel (la dispersion chromatique et la dispersion intermodale dans un coupleur optique directionnel.
  - 2- Un aspect numérique représentant une application: consacré à la simulation numérique de la propagation des impulsions non linéaires dans un coupleur optique directionnel, en utilisant la méthode numérique Split-Step Fourier.

#### IV-2.Travaux de thèse de Doctorat :

Mes travaux de thèse de Doctorat [15] ont été dirigés par le Pr. BENOUAZ Tayeb. Ils sont intitulés : « **Relation entre la Dérivée Optimale et la Stabilité Asymptotique** », soutenue publiquement le 13 Décembre 2009 à l'université de Tlemcen.

Sur la même voie et dans le même domaine que ma thèse de magister, ainsi que la thématique de notre équipe de recherche tout en développant les perspectives ciblées des travaux entrepris.

L'objectif de ce travail inscrit dans la ligne des travaux entrepris par Benouaz et Arino est de contribuer à la réponse à cette question. Ceci a été accompli en examinant la relation entre une nouvelle méthode de linéarisation appelée dérivée optimale et la notion de stabilité en particulier la stabilité asymptotique de l'équation non linéaire. Pour ce faire, deux parties sont envisagées à savoir :

la confrontation et la validation des résultats de l'application de la méthode de **dérivation optimale** aux modèles physiques:

- Ces modèles engendrent le phénomène de bifurcation (**circuit électronique complexe**) ceci à travers une comparaison par rapport aux résultats obtenus en utilisant le code de simulation le plus répandu pour la **continuation numérique de bifurcation AUTO2000**.
- L'approfondissement de cette relation pour une classe particulière d'équations non linéaires dont la linéarisé classique présente un centre (elle prédit la stabilité sans avoir des informations sur la stabilité asymptotique). Un résultat très important a été prouvé définissant le lien entre la méthode et la stabilité asymptotique à travers notre étude de la trace de la matrice optimale.
- la généralisation de la méthode de linéarisation optimale, suivie d'une application pour l'étude d'un **système physique**.
- Application de la méthode dérivée optimale aux systèmes d'équations différentielles ordinaires non linéaires modélisant des systèmes **non linéaires commandés**.
- Un travail intéressant qui consiste à appliquer la méthode de dérivation optimale à étude des **modèles ratio-dépendant** issues de la biologie et l'écologie ainsi que l'épidémiologie.

#### IV.2.1 Etude d'une équation différentielle ordinaire dépendant d'un paramètre:

- Comparaison entre la méthode de dérivation optimale et la méthode de continuation Auto2000 - :

Vu le besoin croissant d'outils numériques de calcul et de visualisation pour l'étude des systèmes dynamiques qui apparaissent dans des applications physiques importantes modélisées par des systèmes d'équations différentielles ordinaires compliquées. Ces outils de calcul doivent permettre d'aller bien au-delà de la simple simulation: par exemple ils identifient et classifient d'importantes bifurcations. Ainsi l'exigence de maîtriser un outil numérique pour la continuation des bifurcations des équations différentielles ordinaires, nous a suscité à faire des simulations en utilisant le logiciel le plus répandu pour l'étude de ce type de problèmes "Auto2000" [18].

l'objectif été la mise au point de l'utilisation de la méthode de dérivation optimale pour l'analyse de la stabilité de système physique présentant le phénomène de bifurcation (changement de comportement pour des valeurs critiques accompagné d'un échange de stabilité). une comparaison à été faite en analysant le système suivant modélisant le circuit de l'amplificateur chaotique suivant:

L'amplificateur chaotique [16] représenté dans le Fig. 1, est un circuit autonome, régi par le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \delta \cdot y + z \\ \dot{z} = \gamma[\alpha \cdot f(x) - z] - \sigma \cdot y \end{cases} \quad \text{avec : } \begin{cases} x = V_c \\ y = \sqrt{L/C} \cdot i \\ z = V_c \end{cases} \quad (3)$$

et  $\gamma = \frac{\sqrt{LC}}{RC'}$ ,  $\delta = r\sqrt{\frac{C}{L}}$ ,  $\sigma = \frac{C}{C'}$

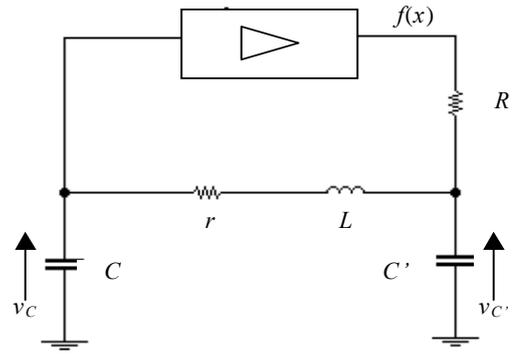


Fig. 1. Circuit de l'amplificateur chaotique.

La détermination des points d'équilibre obtenue par la résolution du système  $F(X)=0$  ceci donne :

Alors d'après ces résultats, on constate bien que, pour  $\alpha \leq 1$ , le système possède un seul point d'équilibre à l'origine  $(0,0,0)$ . En revanche si  $\alpha$  augmente c'est à dire  $\alpha > 1$  deux autre points d'équilibres apparaissent

(P+ , P- ) ayant les coordonnées suivantes :  $\left( \pm \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}}, 0, \pm \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \right)$

L'étude de la stabilité de ces points s'effectuera suivant la valeur critique  $\alpha$  (paramètre de bifurcation), on linéarise le système par la méthode de dérivation optimale autour de chaque points, comme suit :

linéarisation autour de l'origine pour  $\alpha \leq 1$ , linéarisation autour de (P+ , P- ) pour  $\alpha > 1$  puis, nous déterminons les valeurs propres du système linéarisé, Pour l'application numérique, on utilise les valeurs suivantes :

$$R = 3380\Omega, r = 347, L = 145mH, C = 345nf, C' = 225nf, (\gamma = 0.2932, \delta = 0.5337, \sigma = 1.5244)$$

Pour cela, on exploite les propriétés importantes de la méthode de dérivation optimale surtout celles liées à l'ordre (influence du choix de la condition initiale) moyennant une techniques d'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires à savoir : le critère de Routh Hurwitz.

L'utilisation du logiciel Auto2000 permet de construire et tracer le diagramme de bifurcation illustré par la figure suivante : Fig2: Diagramme de bifurcation du système (3) représentant la variation de la norm L2 en fonction du paramètre  $\alpha$ (gain) : trait plein solution stable, en pointillé solution instable sur ce diagramme elle sont représenté les résultats (représentation des solutions dans obtenues par l'application de la dérivée optimale) (voir les cercles).

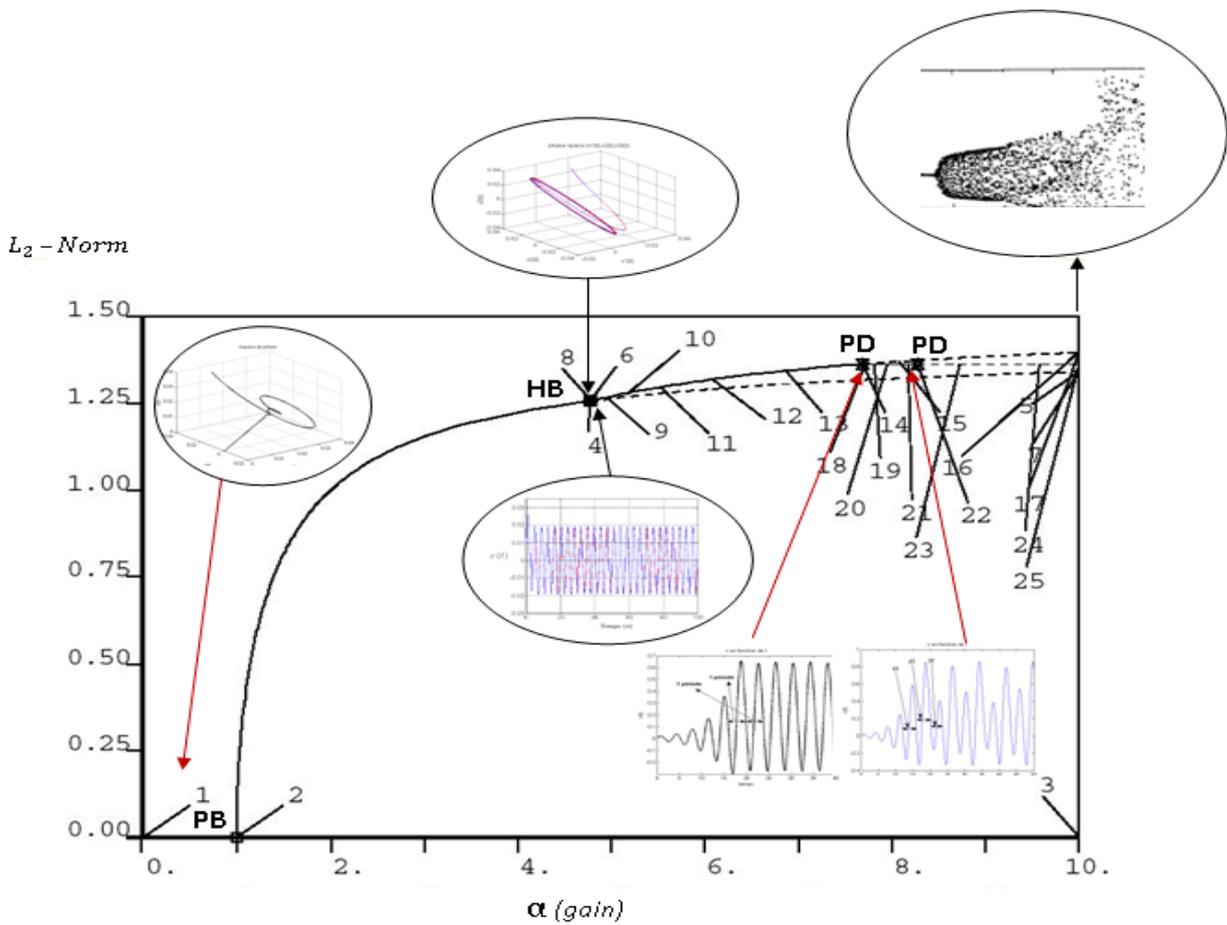


Fig2: Diagramme de bifurcation du système (3) représentant la variation de la norm  $L_2$  en fonction du paramètre  $\alpha$ (gain)

Un tel diagramme permet d’avoir une vision plus globale de la succession de plusieurs bifurcations.

**VI.2.1.1 Interprétation des résultats de la comparaison:**

Comme nous pouvons le voir sur la figure (1.9), le tracé du diagramme de bifurcation en fonction des variations du gain  $\alpha$  est fidèle à l’analyse numérique mené en utilisant la dérivation optimale. Il se décompose en trois intervalles de variation du paramètre de bifurcation :

$$\begin{cases} \alpha < 1 \\ 1 < \alpha < \alpha_H \\ \alpha > \alpha_H \end{cases} \tag{4}$$

Pour  $\alpha < 1$ , le système possède alors un point fixe stable à l’origine  $O(0, 0, 0)$ , l’ensemble des trajectoires convergent vers le seul point d’équilibre stable à l’origine (voir espace de phase pour  $\alpha < 1$  sur le diagramme de la figure ), Cette stabilité est traduite graphiquement par un trait plein sur le diagramme , et signe moins (-) (de la valeur  $PAR(1) = \alpha = 0$  jusqu’au  $\alpha = 1$ ).

**Bifurcation Pitchfork (fourche):**  $1 \leq \alpha < \alpha_H$  : Lorsque  $\alpha$  atteint la valeur 1, le système se déstabilise : le point fixe sa stabilité et sa nature topologique change. Il y a bifurcation. On voit apparaître alors deux points fixes stables ( $P_+$ ,  $P_-$ ). Il y a eu en quelque sorte un dédoublement du point fixe donnant naissance de deux états symétriques. Le diagramme de bifurcation figure(2.9) correspondant montre une branche qui bifurque en augmentant la valeur de  $\alpha$  à partir de la valeur critique de bifurcation  $\alpha = 1$ . La bifurcation fourche apparaît souvent en physique, car elle reflète une invariance par parité du système.

**Bifurcation Hopf:** Lorsque  $\alpha = \alpha_H$ , le logiciel auto2000 recense un autre type de bifurcation noté HB Bifurcation Hopf pour la valeur critique  $PAR(1) = 4.780389E+00$ . Cette bifurcation se manifeste par l'apparition d'un terme imaginaire dans la stabilité d'un point fixe et l'apparition spontanée d'un cycle limite comme il est indiqué sur le diagramme de la figure (2.) c'est-à-dire un attracteur périodique (un ensemble de solutions périodiques marquées par le label 4,6,8,9,10,11,12,13 sur la figure(2.)) , la trajectoire est attirée par une trajectoire circulaire.

Ces résultats confirment celui obtenu par la méthode de dérivation optimale (Voir figure(4)).

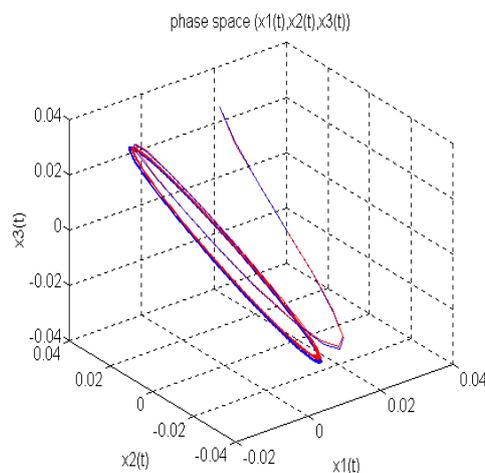


Fig4: Variation de la solution  $x(t)$  en fonction du temps pour des conditions initiales très près de l'origine représentation dans l'espace de phase en utilisant la dérivée optimale

**Bifurcation de dédoublement de période:** en augmentant la valeur du gain (paramètre de bifurcation), le logiciel détecte pour les valeurs critiques ( $PAR(1) = \alpha = 7.692558E +00, 8.282694E +00, 8.413241E +00$ ), un autre type de bifurcation notée PD (Periodic doubling Bifurcation). Le diagramme de bifurcation permet de mieux visualiser l'évolution d'un système vers le chaos après une cascade de bifurcation de doublement de période (bifurcation flip) voir fig.3.

Le développement de l'étude par les physiciens de systèmes non-linéaires a donné lieu à l'émergence d'un grand nombre d'exemple de chaos déterministe. Ici, on étudie un cas où intervient un paramètre de contrôle physique qui permet de faire varier le degré de non-linéarité du système.

### VI.2.1.2 Conclusion:

A la lumière des résultats obtenus, il ressort qu'en se basant sur une propriété importante de la méthode, déterminée à partir de l'estimation de l'erreur commise, la méthode de la dérivée optimale permet de détecter les différents échanges de stabilité qui accompagnent le phénomène complexe de bifurcation. Cette méthode décrit bien le changement de

comportement des solutions et détecte le changement de stabilité surtout au voisinage immédiat du point de bifurcation, en obéissant d'une façon satisfaisante à la dynamique du système non-linéaire initial.

Par ailleurs, il apparaît clairement que le choix des conditions initiales pour l'application de la procédure de dérivation optimale est déterminant. Pour une bonne utilisation de cette méthode, particulièrement pour l'étude des points critiques, le choix de conditions initiales appropriées s'impose.

Cependant, le théorème Hurwitz va s'avérer très utile dans le calcul de la valeur du paramètre de bifurcation de Hopf présenté ci-dessous.

Une confrontation en utilisant le logiciel auto2000, permet de valider les résultats obtenus par la méthode de dérivation optimale. En utilisant ce logiciel on peut conclure que :

— Les échanges de stabilité qui ont lieu brusquement à la valeur de bifurcation, sont suivis rigoureusement par la dérivée optimale (les valeurs propres de la matrice optimale passent du demi plan droit au demi plan gauche, en gardant les parties réelles des valeurs propres non nulles à la valeur de bifurcation).

#### IV.2.2 Relation entre la méthode de dérivée optimale et la stabilité

##### Asymptotique:

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre d'une équation différentielle ordinaire est une tâche presque triviale si la fonction  $F$  qui définit l'équation est suffisamment régulière, disons  $C_1$ , au voisinage de l'équilibre, et si sa linéarisation en ce point est hyperbolique. Dans ce cas, on sait que l'équation est équivalente à l'équation linéarisée, dans le sens, qu'il existe un difféomorphisme local qui transforme les trajectoires voisines du point d'équilibre en celles voisines de zéro de l'équation linéaire. Par contre, la tâche est tout autre en l'absence de régularité, ou si le point d'équilibre est un centre. Concentrons nous sur le cas non régulier. Dans ce cas, on ne peut pas dériver l'équation et on ne peut donc pas étudier l'équation linéarisée. Une question naturelle se pose alors:

***Y a-t'il d'autres moyens d'associer à l'équation non linéaire une équation linéaire, dont le comportement asymptotique soit le même?***

Une deuxième question se pose également:

***Quel est alors le lien entre la stabilité asymptotique de l'équation non linéaire et la dérivée optimale?***

#### VI.2.2.1 Problématique et idée du problème

Envisageons par exemple un système non linéaire avec une fonction de type valeur absolue tel que la non-linéarité n'est pas dérivable au voisinage du point d'équilibre.

La linéarisation classique donne une condition nécessaire mais non suffisante, car elle ne permet pas l'étude de stabilité en présence de valeurs propres purement imaginaires. Ainsi, la recherche d'une fonction de Lyapunov elle-même constitue un sujet sensible car elle est basée en général sur l'expérience et au choix.

Nous étudions le lien entre la notion de fonction de Lyapunov ou plus généralement la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre et les propriétés de la dérivée optimale en ce point. Dans cette ordre d'idée, nous considérons l'équation (5) suivante:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) = Mx + G(x), \quad x(0) = x_0 \quad (5)$$

Où M est une matrice dont les valeurs propres sont égales à  $\pm i$ .  
dans laquelle F vérifie les hypothèses suivantes

H1)  $F(0) = 0$ .

H2) Le spectre  $\sigma(DF(x))$  est contenu dans l'ensemble  $\{z : \text{Re } z < 0\}$  pour tout  $x \neq 0$ , dans un voisinage de 0, où  $DF(x)$  existe.

H3) F est Continue,  $\gamma$  Lipchitzienne.

H4) G est de classe  $C_1$ .

On se place dans le cas où G est une fonction qui vérifie

$$G(x) = -\Phi(\|x\|)x + G_3(x) \quad (5)$$

$\Phi(\|x\|) = o(\|x\|)$ ,  $G_3$  est une fonction de l'ordre de  $o(\|x\|^3)$ .

En particulier, on a  $G(0) = 0$ , et  $DG(0) = 0$ .

### VI.2.2.2 Application :

la détermination de la stabilité devient plus délicate, et le comportement réel du système est déterminé par les termes non linéaires de haut degré; selon ces termes, l'équilibre peut être instable, stable ou même asymptotiquement stable. Dans cette optique, par conséquent nous étudions une classe particulière d'équation différentielle ordinaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + ax(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + ay(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (6)$$

Dans ce cas, l'étude de la stabilité du point d'équilibre pose un problème. En effet la linéarisation classique ne permet pas de conclure car le système possède des valeurs propres purement imaginaires. En fonction de la valeur de la constante ( $a=1$  et  $a=-1$ ), on distingue les deux cas.

Dans les deux exemples, il y a lieu de noter que le système non linéaire s'écrit après application de la méthode de dérivation optimale comme suit

$$\begin{cases} \tilde{A} = M + r(x_0) \\ x_0 = x(0) \end{cases} \quad (7)$$

ou encore  $\tilde{A} = DF(0) + r(x_0)$ , Le premier terme étant linéaire, le deuxième terme, qui est en fait la linéarisation optimale de la fonction non linéaire  $G(x)$ , devient dépendant de la donnée initiale  $x_0$ . Tout se passe comme si on avait perturbé  $DF(0)$ , en écrivant la matrice optimale de la forme  $\tilde{A} = DF(0) + o(\|x_0\|)$ .

### VI.2.2.3 Résultat important

Sous les hypothèses de le présent travail, si  $\|G\|$  est aussi petit que nécessaire et  $DG(x)$  est uniformément bornée, alors [18] :

$$\text{sgn}(\text{trace}(\tilde{A})) = \text{sgn}(a) \quad (8)$$

### VI.2.2.4 Analyse de Bifurcation:

le logiciel de continuation numérique des bifurcations "**Aut 2000**" afin d'analyser la stabilité et les branches de solutions périodiques au voisinage du point d'équilibre non hyperbolique à l'origine  $(0, 0)$ , a été utilisé pour analyser ce problème dont les résultats sont représentés sur le diagramme suivant:

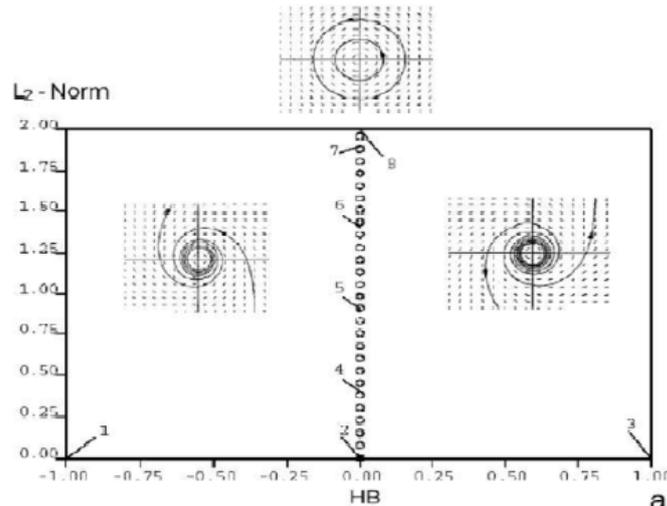


Fig. 5 : représente le digramme de bifurcation du système non linéaire

Le diagramme de bifurcation de la figure 3.6 montre que pour  $a < 0$ , on a une courbe qui s'enroule en spirale (spirale qui converge vers 0 quand  $t$  augmente). Dans ce cas l'origine est asymptotiquement stable (foyer stable) (ceci confirme les résultats obtenus par la dérivée optimale (voir figure 5)).

Pour  $a = 0$ , caractérisé par HB, le caractère de la solution change, ce point représente une bifurcation Hopf avec échange de stabilité. Ce changement est souvent accompagné par l'apparition d'orbites périodiques encerclant le point d'équilibre à l'origine. Dans ce cas toutes les solutions sont périodiques et l'origine est un centre.

Pour  $a > 0$  l'origine devient instable et l'ensemble des solutions diverge en spirale.

### VI.2.2.3 Conclusion:

En conclusion, la réponse à la question relative à la relation entre les propriétés de la stabilité de l'équation linéaire obtenue par la dérivée optimale et celle de l'équation non-linéaire dans le cas vectoriel est très délicate. Généralement, quand la procédure converge, la matrice obtenue est stable. Toutes ces considérations nous amènent à la conjecture suivante :

Conjecture: Si la procédure de dérivation optimale converge et la limite de la suite  $A_j$  est exponentiellement stable (ou si  $A_j$  a un point fixe stable), le système non-linéaire est stable. Cette étude montre que les conditions dans lesquelles la conjecture a été formulée

peut être accomplie, à savoir l'existence, l'unicité et la convergence vers un point fixe stable [19].

La procédure de calcul nous permet également de résoudre les problèmes où la linéarisation classique ne peut pas répondre au problème de la stabilité ou n'existe pas. L'analyse de bifurcation avec le logiciel de continuation et d'analyse de bifurcation AUTO2000 confirme les résultats obtenus par la dérivée optimale. Il a également montré sa capacité à être un outil puissant pour l'analyse de la stabilité de ce type d'équation différentielle ordinaire à deux-dimensions. du fait qu'on peut avoir un résultat important est direct de la stabilité est prouvé en examinant la trace de la matrice optimale obtenue pour ce type particulier d'équations.

### IV.2.3 Méthode de généralisation de la linéarisation optimale

Dans cette partie nous proposons une méthode qui associe une équation linéaire à une équation différentielle non linéaire ordinaire au voisinage du point d'équilibre, définie comme une généralisation de la linéarisation optimale. Il est une sorte d'une linéarisation globale contrairement la perturbation non-linéaire d'une équation linéaire, qui se distingue de celle linéaire classique au voisinage d'un point stationnaire.. L'approche suivi et de type optimisation.

Nos résultats sont à la suite des travaux menés par Vujanovic [20] et Jordan et al.[21], [22]. un formalisme de la méthode de linéarisation dans le cas scalaire et vectoriel à été développé. afin de montrer l'efficacité de la technique proposé une application de la méthode de linéarisation optimale généralisé à un circuit électronique non linéaire afin d'illustrer la procédure théorique [23].

un exemple d'application a été présenté afin d'illustrer l'efficacité et l'utilité de la théorie présentée. C'est le cas où la non linéarité n'est pas assez régulière au voisinage du point d'équilibre et par conséquent Les théorèmes de linéarisation classique ne sont pas applicables, puisque la Jacobienne au point d'équilibre n'existe pas c'est-à-dire  $DF(0)$  n'existe pas : Cas où la fonction non linéaire, définissant l'équation comporte des fonctions de type valeur absolue ( $| \cdot |$ ), et donc non différentiable en 0. Une telle situation peut être rencontrée, par exemple, dans le cas du circuit modélisé par le système E.D.O. suivant:

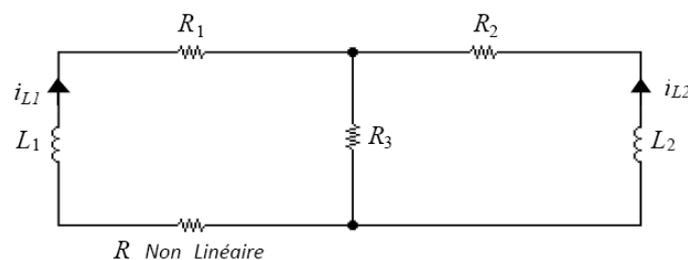


Fig. .6 : Circuit électronique avec une résistance non linéaire

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - |x| - y \\ \frac{dy}{dt} = -x - 2y \end{cases} \quad (9)$$

L'application de la méthode de généralisation de linéarisation optimale à cet exemple montre que cette technique décrit bien le comportement qualitatif du modèle étudié, et

elle répond à la question de stabilité du point d'équilibre dont les méthodes de linéarisation reste impuissant de répondre. Ceci peut être traduit par les figure suivante représentant une comparaison des solutions du système non linéaire, comparées aux solutions du système linéaire optimal, pour la condition initiale  $(x_0, y_0) = (0.5, 0.3)$ . Ainsi que l'erreur quadratique commise entre ces deux solutions.

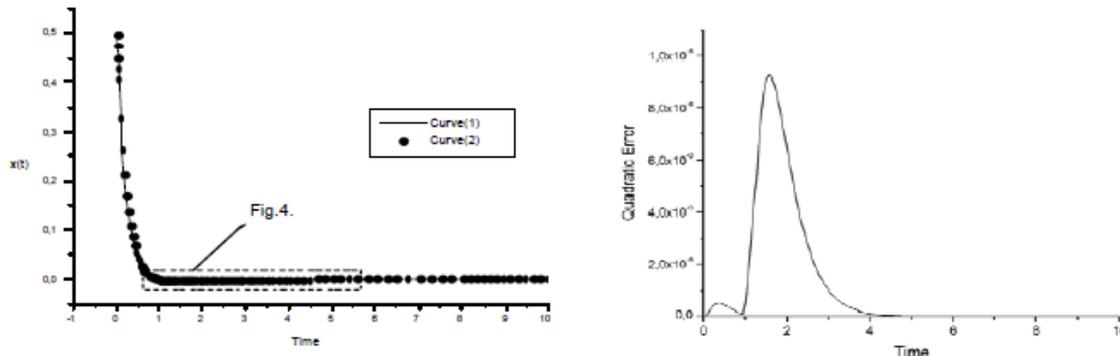


Fig. .8: représentant une comparaison des solutions du système non linéaire, comparées aux solutions du système linéaire optimal, pour la condition initiale  $(x_0, y_0) = (0.5, 0.3)$ . Ainsi que l'erreur quadratique commise entre ces deux solutions.

Nous avons pu donner une généralisation de la méthode de linéarisation optimale, développé par Jordan et al., en précisant :

- L'existence et l'unicité de la meilleure approximation au sens des moindres carrés.
- Le choix de la matrice initiale  $A_0 = DF(x_0)$ .
- La forme générale à la matrice optimale, obtenue.

L'application de la méthode de généralisation de linéarisation optimale à un exemple dont la non-linéarité n'est pas assez régulière au voisinage du point (fonction de type valeur absolue  $|\cdot|$ ), montre que cette technique décrit bien le comportement qualitatif du modèle étudié, et elle répond parfaitement à la question de stabilité du point d'équilibre dont les méthodes de linéarisation restent impuissantes.

#### IV.2.4 Application de la méthode dérivée optimale d'équations différentielles ordinaires non linéaires avec commande

On s'intéresse , dans cette partie d'appliquer la méthode de dérivation optimale aux systèmes physiques commandé modélisant des circuits électroniques avec source d'excitation (commande) qui sont en général décrits par des systèmes d'équations différentielles ordinaires non-linéaires de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, u) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (10)$$

qui représente un système contrôlé (ou commandé) .

$x(t) \in M$  ( $M$  est un ouvert connexe de  $\mathbb{IN}^R$ ), ces équations modélisent des systèmes dynamiques commandés.

Le but est de trouver une équation différentielle ordinaire linéaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (11)$$

Approchant l'équation non linéaire (10) aux mêmes conditions initiales [24]. avec

$$\begin{aligned} A_{(j)} &= \left[ \int_0^{+\infty} [F(y_j(t), u(t))] [y_j(t)]^T dt - B_{(j)} \left[ \int_0^{+\infty} [u(t)] [y_j(t)]^T dt \right] \right] \\ &\quad \left[ \int_0^{+\infty} [y_j(t)] [y_j(t)]^T dt \right]^{-1} \\ B_{(j)} &= \left[ \int_0^{+\infty} [F(y_j(t), u(t))] [u(t)]^T dt - A_{(j)} \left[ \int_0^{+\infty} [y_j(t)] [u(t)]^T dt \right] \right] \\ &\quad \left[ \int_0^{+\infty} [u(t)] [u(t)]^T dt \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (12)$$

En utilisant un calcul itératif et si ces deux suite convergent alors leur limites sont les matrices suivante  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$ . Le système (12) représente la dérivée optimale du système non linéaire (10). nous avons choisi comme exemple d'application le circuit électronique avec excitation suivant:

### Application à une Jonction non linéaire de type Josephson

On considère, pour cette application, le cas d'un système physique modélisant un circuit électronique simple qui contient une diode avec une jonction de type Josephson. Ces jonctions présente un grand intérêt industriel par leur propriétés physiques, constituent un dispositif de choix pour plusieurs domaines d'application à savoir:

- C'est le constituant élémentaire du SQUID (Superconducting Quantum Interference Device), le plus fin détecteur de champ magnétique (et donc de courant). Un SQUID est constitué de 2 jonctions en parallèles dans une boucle.
- C'est aussi le constituant de base de la logique rapide dite RSFQ (Rapid Single Flux Quantum) où elles jouent le rôle du transistor et autoriseraient des cadences en centaines de Ghz.
- C'est aussi un des détecteurs de photons les plus performants. On parle alors de jonctions supraconductrices à effet tunnel (STJ en anglais). Ces dispositifs combinent une sensibilité ultime jusqu'aux photons uniques dans une large bande spectrale (des rayons X au proche infrarouge) avec une bonne résolution en énergie.

Soit le circuit suivant qui contient une diode avec une jonction de type Josephson donné par la figure suivante

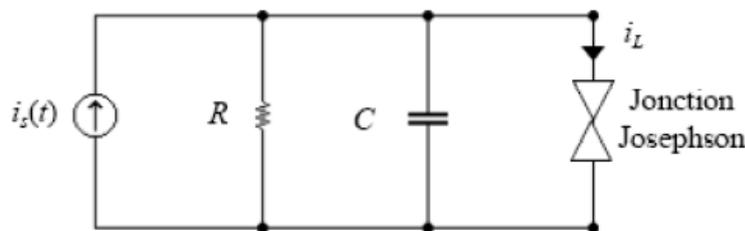


Fig. 9. circuit suivant qui contient une diode avec une jonction de type Josephson donné par

C'est C'est un circuit présentant deux variables d'état (la chute de tension  $v_c$  aux bornes de la capacité et le flux  $\Phi_L$  et dont le caractère non linéaire provient de la présence d'une jonction dite de Josephson qui est en fait équivalente à une inductance non linéaire. Le courant qui passe à travers cette jonction s'écrit :

$$i = I_0 \sin(K\Phi) \quad (13)$$

ou  $\Phi$  représente le flux,  $k = \frac{4\pi e}{h}$  est la constante de Josephson, ( $e$ ) est la charge de l'électron et  $h$  la constante de Plank. Les lois de Kirchhoff relatives aux nœuds et aux mailles du circuit nous donnent les équations d'état suivantes:

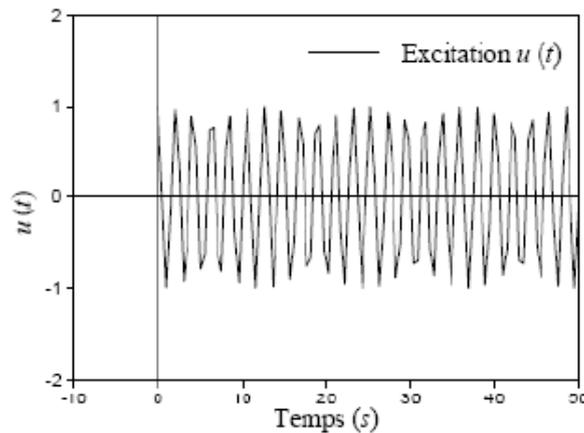
$$\begin{cases} \frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{c} [-Rv_c - I_0 \sin(K\Phi_L)] + i_s(t) \\ \frac{d\Phi_L}{dt} = v_c \end{cases} \quad (14)$$

On considère que la capacité  $C$  est chargée initialement par une tension  $v_{C0}$ , et donc les conditions initiales de ce système non linéaire sont  $(v_{C0}, \Phi_{L0}) = (10, 0)$ .

Les paramètres choisis dans le circuit sont  $C = 1F$ ,  $R = 0.25\Omega$ ,  $I_0 = 1A$ ,  $K = 1$ ,  $i_s(t) = \cos(100\pi t) A$ . On pose  $x = v_c$  et  $y = \Phi_L$

et ou  $u(t)$  représente l'excitation  $u(t) = \frac{1}{c} i_s(t) H(t) = [\cos(100\pi t)] H(t)$

L'excitation  $u(t)$  est représentée dans sur la figure suivante:



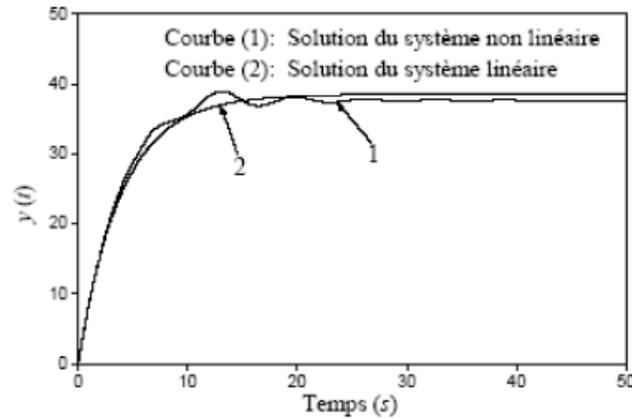


Fig. .10 : Variation de la solution  $y(t)$  en fonction du temps pour les conditions initiales  $(x_0, y_0) = (10, 0)$

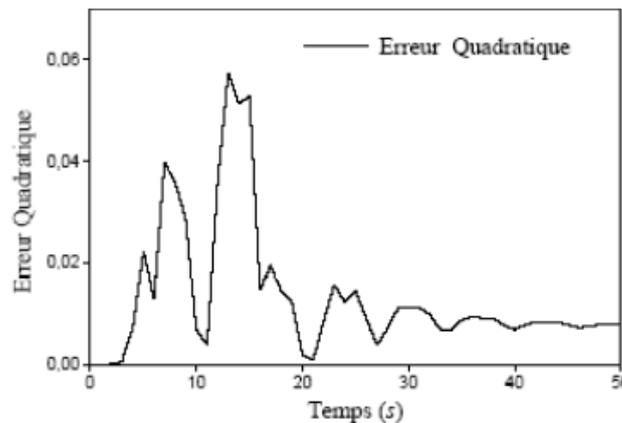


Fig. 11: Variation de l'erreur quadratique en fonction du temps

### Commentaires générales

On remarque que la solution donnée par la dérivée optimale est du même ordre de grandeur que celle donnée par l'équation non linéaire. Ceci est attesté par l'étude de l'erreur quadratique qui atteint son maximum au temps  $t = 13s$ , 5.73% et reste donc petite. Cette erreur devient trop petite quand  $t \geq 30 s$  c'est à dire quand les solutions atteignent le point de fonctionnement du circuit électronique. A ce niveau la solution du système non linéaire est fidèlement décrite par le système linéaire optimal.

La solution du système linéaire optimal obtenue par dérivation optimale Elle permet d'amener le système après excitation, de sa position d'équilibre vers son point de fonctionnement ou solution de régime. les deux courbe montre que cette solution s'établit après qu'un certain laps de temps s'est écoulé pendant lequel les phénomènes transitoires ont lieu , alors il faudrait au moins donner l'ordre de grandeur du temps transitoire si l'on veut caractériser la solution de régime (qui diffèrent d'un problème à un autre). D'autre part, le temps transitoire n'est connu qu'après l'étude des phénomènes transitoires, ce qui

représente une étude détaillée que celle du régime. à partir de ces figure on parvient à séparer qualitativement le régime transitoire de phénomène de régime en définissant la solution de régime comme étant la solution asymptotique quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Il est vérifié que les solutions d'un circuit linéaire strictement stable comportant une seule source, dont la dépendance temporelle est sinusoïdale, convergent vers même solution sinusoïdale.

Si le régime sinusoïdale est unique, il possède la même période que la source (principe de superposition des sources).

une conjecture à été formulé pour les système non linéaire est qui s'énonce comme suit conjecture: Si les solutions d'un circuit non linéaire excité par une source sinusoïdale reste bornées, elles converge vers une même solution de régime périodique dont la période fondamentale est identique à celle de la source.

L'exemple du circuit non linéaire contenant une jonction non linéaire de type Josephson contredit cette conjecture du fait que l'excitation est sinusoïdale tandis que la solution de régime n'est pas purement sinusoïdale.

## Conclusion

L'exemple exposé montre que l'approximation obtenue par dérivation optimale donne des résultats satisfaisants par rapport aux résultats exacts tout en respectant la dynamique du problème initial. Nous remarquons bien que les solutions obtenues convergent toutes vers la solution de régime.

Le principe de superposition est invalide pour les circuits non linéaires La linéarisation des systèmes non linéaires commandés permet :

— D'étudier la contrôlabilité de ces équations non linéaires, en général, en démontrant la contrôlabilité du problème linéarisé selon le théorème suivant

Si le système (14) est commandable au premier ordre au point d'équilibre  $(x_{eq}, u_{eq})$ , il est localement commandable en  $(x_{eq}, u_{eq})$ .

— De mettre à la disposition de l'ingénieur actuellement à sa disposition un ensemble de méthodes et outils très différents, dont la méthode la plus simple consiste à linéariser le système non linéaire en utilisant la méthode de dérivation optimale surtout lorsque les autre méthode de la linéarisation tombe en défaut, et en particulier le but principale de réaliser pratiquement cette linéarisation dans le domaine fréquentiel.

En général, afin d'utiliser les méthodes de contrôle pour des systèmes linéaires pour étudier un modèle non linéaire. Il est indispensable de faire une linéarisation autour d'un point stationnaire.

Néanmoins, très rapidement, l'ingénieur s'est rendu compte que ces approximations peuvent être pénalisantes du point de vue des performances, et c'est pourquoi se sont développées des techniques de "commande non linéaire " qui sont pour la plupart des applications de la géométrie différentielle (cf. variétés différentiables) ; d'autres approches sont fondées sur l'utilisation de l'algèbre différentielle ; d'autres encore, sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov (cf. équations différentielles).

### VI.2.5 Application de la méthode dérivée optimale aux systèmes de dynamique des populations-modèles ratio-dépendant- :

La dynamique des populations s'intéresse au développement numérique de toutes les populations d'êtres vivants, et plus particulièrement de celles des animaux sexués. Les répartitions de poids, la composition par âge des individus, l'environnement, la biologie

des groupes, et les processus qui influent sur ces changements font également partie de son champ d'étude. Ces études ont pour but, outre de prévoir les accroissements ou diminutions des populations, de comprendre les influences environnementales sur les effectifs des populations. Des études sur ces sujets sont incontournables par exemple pour la gestion de la pêche, la gestion cynégétique, le management des zones protégées, le contrôle des populations d'animaux dits nuisibles...etc.

La construction et l'étude de modèles pour la dynamique des populations de prédateurs-proies systèmes ont toujours une proportion importante domaine de l'écologie depuis la fameuse Lotka-Volterra.

### Pour quoi les modèles ratio-dépendant ?

Dans les systèmes écologiques, la fonction de réponse traduit la manière dont le prédateur s'adapte aux changements de la densité de la proie. Parmi les modèles les plus classiques, il y a la fonction de type Michaelis-Menten de type Holling II.

Récemment, les modèles traditionnels ont été mis en question par de nombreux biologistes : Arditi et Guinzburg [24], Akcakaya[25], Gutierrez. Une réponse ratio-dépendante a été mise en évidence par Arditi. Une réponse ratio-dépendante est une réponse qui dépend du rapport entre la proie et le prédateur. Ce type de réponse correspond notamment au partage de la ressource entre les prédateurs.

Voici un exemple de modèle ratio-dépendant [ ] :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - bx) - c \frac{xy}{mx + y} \\ \frac{dy}{dt} = y \left( -d + \frac{f \cdot x}{mx + y} \right) \\ x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0 \end{cases} \quad (14)$$

un problème rencontré dans le traitement de ces équations est l'absence de régularité au voisinage de l'origine(0,0). D'un point de vue mathématique, le rapport prédateur-proie dépendante des modèles soulèvent des questions délicates car la réponse fonctionnelle ou fonction trophique n'est pas défini à l'origine (0,0).

Alors il n'est pas possible d'analyser par la méthode traditionnelle de linéarisation le comportement au voisinage du point d'équilibre à l'origine. Cet obstacle peut nuire sérieusement à la bonne compréhension d'un modèle surtout que le voisinage de l'origine représente une riche dynamique de l'évolution des populations (extinction déterministe, coexistence,...) d'une importance cruciale du point de vue biologique écologique.

Il y a des méthodes qui permettent de contourner en partie cet obstacle, notamment celle de la valeur propre non linéaire. leur mise en œuvre est toutefois fort délicate et suppose une bonne connaissance de l'analyse fonctionnelle.

Pour toutes ses raisons nous avons constaté que la méthode de dérivation optimale représente une bonne candidate et outil numérique pour l'analyse de ce type de modèle, du fait qu'on peut associer un système linéaire optimale au système non linéaire même si les équations non linéaires décrivant ces derniers sont irréguliers .

#### VI.2.5.1 Effet d'extinction dans un modèle parasites-populations hôte:

### VI.2.5.1.1 Présentation du Modèle :

C'est un modèle proie-prédateur ratio-dépendent déterministe, ressemblant à un modèle simple de type SI (Susceptible - Infecté), c'est modèle formulé par Ebert et al (2000), révisé et corrigé par Tzy-Wei Hwang et Yang Kuang (2001), il représente l'effet d'extinction des parasites dans un système de hôte parasite (population hôte). Cette dynamique d'extinction ressemble à celle des modèles de (Abrams et Ginzburg [26](2000), Arditi et Berryman (1991), Cosner et al (1999)). Mathématiquement, le mécanisme d'extinction dans ce type de système résulte de la dégénérescence à l'origine (Jost et al (1999), Kuang et Beretta(1998)).

L'origine, comme point d'équilibre représente l'extinction de la population hôte. Vu que la réponse fonctionnelle n'est pas dérivable en ce point, elle ne peut être linéarisé autour de ce point. Ce qui justifie la recherche d'autres techniques de linéarisation pouvant donner des résultats satisfaisants concernant de ces modèles non linéaires. Le modèle est donné par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a \cdot (x + \theta y) [1 - c(x + y)] - dx - b \frac{xy}{x + y} \\ \frac{dy}{dt} = -(d + \alpha) y + b \frac{xy}{x + y} \\ x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0 \end{cases} \quad (15)$$

$x(t)$ :représente la densité des population hôte susceptible d'être infectées (non infectées) par unité de temps

$y(t)$ :représente la densité des population hôte infectées par unité de temps

$\theta$  : Représente la fécondité relative de la population hôte infectée.

$a$ : Représente le ratio maximum des naissances des personnes non infectées population hôte.

$b$ : Représente la constante du taux d'infection;

$c$ : Représente le pourcentage des naissances.

$d$ : Représente le taux de mortalité des parasites dans la population hôte.

$\alpha$ : Représente le taux de mortalité excessif induit par le parasite.

### VI.2.5.1. 2 Résultats de l'application de la méthode de dérivation optimale:

La méthode de dérivation optimale à été appliqué au point critique à l'origine deux scenarios sont envisagés selon le travail de Tzy-Wei Hwang et al [27]. la variations des valeurs de paramètres du système non linéaire

#### Premier scénario d'extinction :

Le système linéaire optimale possède deux valeurs propres de signe négatif. Donc le système est asymptotiquement stable. Ceci nous montre que l'origine est un nœud stable.

Afin d'illustrer les résultats graphiquement, nous avons tracé le plan de phase des solutions  $(x(t), y(t))$  de notre système. Comparé aux solutions de notre système optimale pour les conditions initiales:

$(x_0, y_0) = (2 \cdot 10^{-5}, 6 \cdot 10^{-4})$  et  $(x_0, y_0) = (10^{-5}, 9 \cdot 10^{-3})$

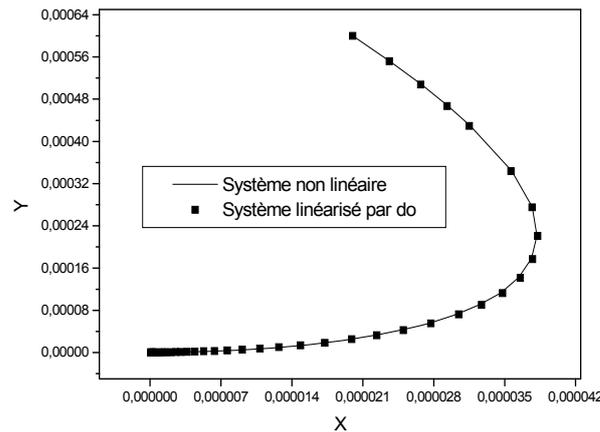


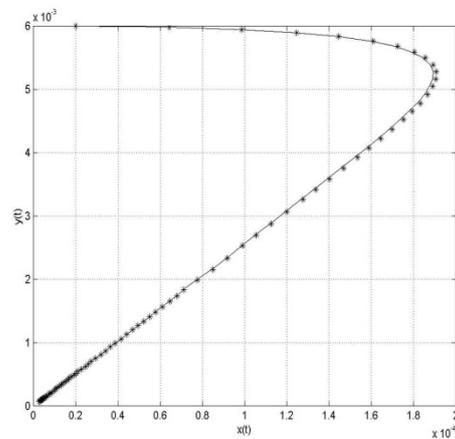
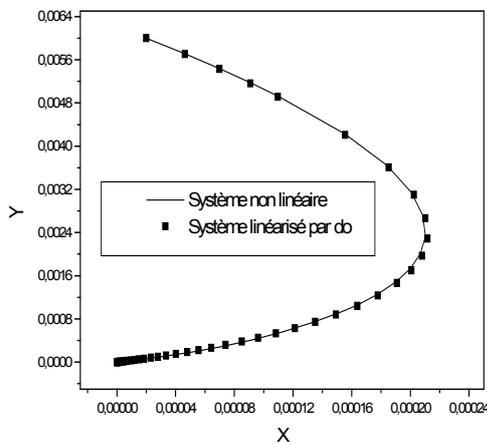
Fig.12: Plan de phase des solutions  $(x(t), y(t))$  pour:  $a=10$   $c = 1$   $d = 20$   $b = 2$   $\alpha = 0.4$   $\theta = 0.2$  ,  
 $\delta = \frac{d}{a} > 1$  et  $(x_0, y_0) = (2.10^{-5}, 6.10^{-4})$

C'est un scénario trivial puisque le taux de mortalité est plus petit que le taux de natalité. ainsi on remarque que décrit bien et confirme le premier scénario d'extinction déduit par Tzy-Wei Hwang.

**Deuxième scénario d'extinction :**

l'application de la méthode de dérivation optimale pour les valeur de paramètres:  $a=10$   $c = 5$   $d = 6$   $b=14$   $\alpha = 0.4$   $\theta = 0.2$  et  $(x_0, y_0) = (10^{-5}, 9.10^{-3})$

les deux figures suivantes représente la plan de phase du système non linéaire comparé au système linéaire optimale, toute en diminuant le taux de fécondité relative de la population hôte infectée  $\theta = 0.2$  et  $\theta = 0.01$



Le 2ème scénario déduit par Tzy et all. est intéressant, il décrit la situation ou: Le taux d'infection ( $\delta > r + 1$ ) est élevé et l'infection impose une réduction du taux de natalité du groupe infecté (Petite valeur de  $\theta$ ). Il est nécessaire de noter que l'effet d'extinction augmente quand le terme  $(1 - \theta)$  représente la diminution du pourcentage de naissance induit par l'augmentation de la population de parasite.

**conclusion**

De l'application de la méthode de la dérivée optimale, on peut noter que cette technique numérique nous permet de prédire la stabilité asymptotique de l'origine qui est de même nature que le cas précédent. Les figures montrent que les deux solutions évoluent et convergent ensemble vers l'origine de manière monotone.

Il est nécessaire de noter que le phénomène d'extinction s'accroît quand le terme représentant la réduction du taux de naissance induit par l'augmentation des parasites diminue. Ceci est illustré par les exemples  $\theta = 0.2$  et  $\theta = 0.01$ .

Les résultats obtenus par la dérivée optimale nous ont permis de déterminer la nature du point d'équilibre  $O(0,0)$  et de décrire le mécanisme d'extinction schématisé par les solutions qui convergent asymptotiquement vers l'origine comme point d'équilibre qui représente l'extinction des deux populations.

### VI.2.5.1 Analyse de la stabilité du point équilibre non-hyperbolique d'un modèle ratio-dépendant- proie prédateur avec un taux de récolte linéaire.

Du point de vue des besoins humains, l'exploitation des ressources biologiques et la récolte des populations sont couramment pratiqués dans les pêches, la foresterie et la gestion de la faune. Il existe un large éventail d'intérêts dans l'utilisation des modèles bioéconomiques afin d'obtenir un aperçu de la gestion scientifique des ressources renouvelables telles que la pêche et les forêts.

L'objectif de la présente analyse est de décrire complètement les structures possibles d'un petit voisinage de point d'équilibre non hyperbolique à l'origine  $O(0,0)$  en utilisant la méthode de dérivation optimale.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{axy}{x+y} - hx \\ \frac{dy}{dt} = y\left(-d + \frac{bx}{x+y}\right) \end{cases} \quad (16)$$

$hx$  : représente la fonction linéaire de la récolte

$-y d$  : terme de mortalité des prédateurs.

ce type de modèle peut posséder un régime de dynamique d'extinction déterministe, qui est d'une importance cruciale du point de vue biologique.

en se basant sur le travail de [28] Min Xiao and Jinde Cao (2009) et les résultats expérimentaux, selon les valeurs des constantes  $a$ ,  $b$ ,  $d$ , et le paramètre de récolte  $h$  on peut distinguer quatre cas possibles caractérisant l'effet de la variation de la constante  $h$  sur la coexistence et l'extinction des deux populations.

voici un exemple d'application de la méthode de dérivation optimale:

**1<sup>er</sup> cas:**  $0 \leq h < 1$ ,  $h = 0$

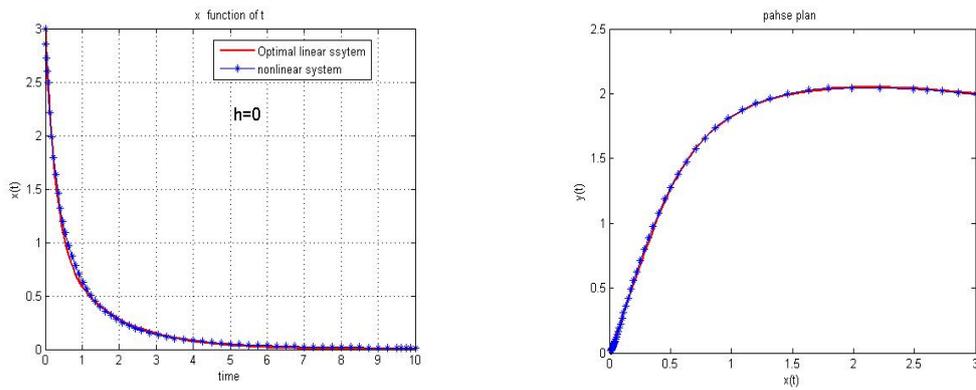


Fig. 13 : représente respectivement Variation de la solution  $x(t)$  en fonction du temps pour la condition initiale  $(x_0, y_0) = (3, 2.5)$  et le plan de phase

**2<sup>ier</sup> cas:  $0.5 \leq h < 1$ , exemple  $h = 0.6$**

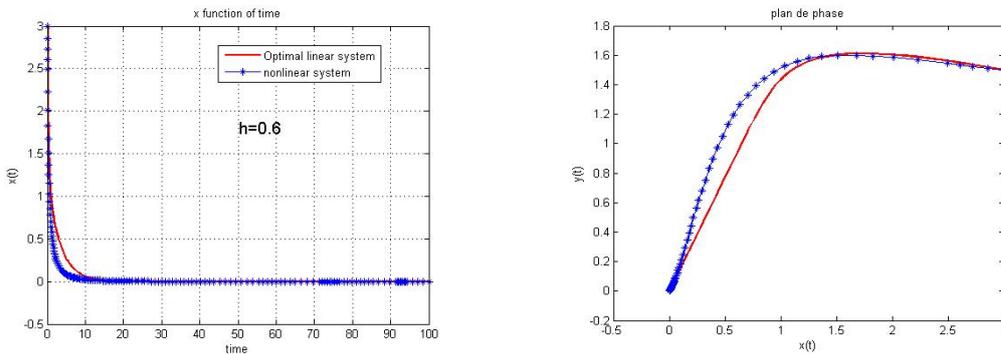


Fig. 14 : représente respectivement Variation de la solution  $x(t)$  en fonction du temps pour la condition initiale  $(x_0, y_0) = (3, 2.5)$  et le plan de phase.

**3<sup>ier</sup> cas:**

$h=0$  et  $0 < h < 1$ , exemple  $h = 0.8$ , ce cas est caractérisé par l'existence des proies et l'extinction des prédateurs.

le système linéaire optimale possède fait apparaître le point d'équilibre à l'origine comme un point selle ceci est confirmé par l'analyse qualitative suivante:

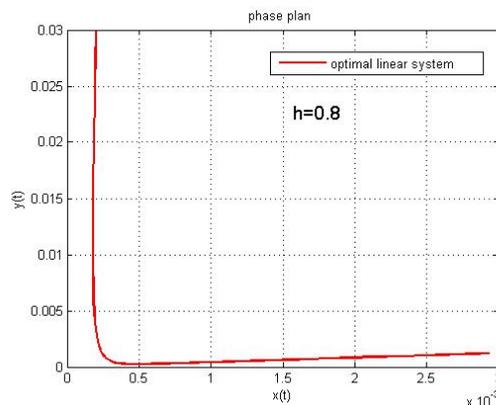


Fig. 15: plan de phase

**4<sup>ier</sup> cas:  $0.238 < h < 1$  :**

Dans cet intervalle il y a extinction des deux populations

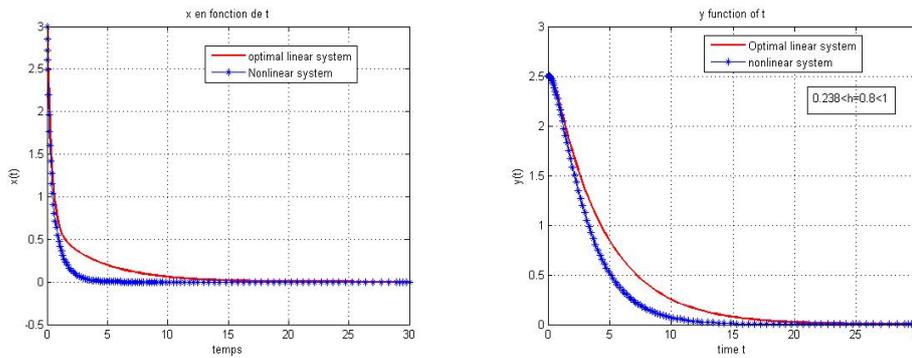


Fig. 14 : représente respectivement Variation de la solution  $x(t)$  et  $y(t)$

## Conclusion:

Les résultats obtenus par la méthode de dérivation optimale montrent que cette dernière permet de d'analyser la stabilité du point critique à l'origine (l'équation différentielle n'est pas dérivable en ce point absence de régularité), toute en obéissant à la même dynamique du système non linéaire initial décrivant le phénomène important d'extinction. l'exploitation des différents cas expérimentales cité dans [28] montre qu'analyse numérique en utilisant cette technique peut être une expérience numérique, permettant d'aider à une récolte raisonnable sans conduire les deux population vers l'extinction (une bonne estimation d'un paramètre de récolte optimale) .

## V-Travaux scientifiques après Thèse

### V.1 Analyse de bifurcation locale d'un système physique non linéaire

La localisation de paramètre critique bifurcations est souvent une tâche centrale de l'analyse d'un système dynamique non linéaire. Bifurcations de codimension 1 qui peuvent être directement observées dans la nature et des expériences à réaliser des surfaces d'espaces de paramètres tridimensionnels. nous proposons une étude qui combine le critère de **Routh-Herwitz** avec la théorie de l'algèbre linéaire (**Linéarisation au sens de Fréchet**) permettant de calculer et visualiser des **surfaces de bifurcation** d'un **systèmes physique complexe** en question de façon très efficace, En particulier, le système physique fourni des exemples concrets de déploiement des singularités qui agissent comme des centres de l'organisation de la dynamique. La visualisation peut améliorer la compréhension qualitative du système. En outre, elle peut aider à localiser rapidement les situations les plus complexes de bifurcation correspondant aux bifurcations de codimension supérieure, et aux intersections des surfaces de bifurcation. L'utilisant la méthode dérivation optimale nous permet de mieux comprendre les dynamiques locales, non seulement dans un système particulier, mais dans des classes entières de systèmes. Notre objective est de faire des progrès avec cette procédure au terme de l'analyse de bifurcation (détection de la bifurcation locale au voisinage des paramètres de bifurcation par rapport à un état initial). nous permet de comparer les résultats obtenus avec ceux

trouvés par la linéarisation classique (dérivé Fréchet dans le point d'équilibre). Cette analyse nous permet de comparer les résultats obtenus avec ceux trouvés par la linéarisation classique (dérivé Fréchet dans le point d'équilibre). Pour illustrer cette possibilité, nous analysons un exemple de système physique .

## V.2 Présentation du modèle physique illustrative

L'exemple provenant d'un système mécanique non linéaire représentant un oscillateur non linéaire forcé [29], [30], en fait, est un dispositif mécanique positionnement avec contrôle feed-back. donné par le système:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta \dot{x} + K(x)x &= -z + F(t) \\ z + \alpha z &= \alpha \gamma x(x-r) \end{aligned} \quad (17)$$

$x$  est défini comme le déplacement,  $\delta > 0$  l'amortissement linéaire avec une constante d'amortissement  $1/\alpha$ , l'objet de contre-réaction contrôlé ( $z$ ) avec la constante de temps et le gain  $\gamma$ :

On prend  $F(t)=0$ ,  $r=0$  représentant un système autonome, dans lequel l'équation régissant n'a aucune dépendance temporelle. Ce type de systèmes dynamiques peut encore présenter des dynamiques compliquées (bifurcations complexes et transition vers le chaos) :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \delta y - z \\ \dot{z} = \gamma \alpha x - \alpha z \end{cases} \quad (18)$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  avec les paramètres  $\delta, \alpha, \gamma > 0$ .

### Détermination des surfaces de bifurcation dans l'espace des paramètres

Le système possède un point d'équilibre à  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  et deux autres non-triviaux symétriques  $(P_+, P_-)$  avec  $(x, y, z) = (\pm\sqrt{1-\gamma}, 0, \pm\gamma\sqrt{1-\gamma})$ . On peut conclure les résultats suivants :

- **Case 1:** si  $\gamma \geq 1$  le système possède un seul point d'équilibre trivial à l'origine avec  $x=0$  (pour n'importe quelle valeur des paramètres). En fait pour  $\gamma = 1$ , les trois équilibres coïncident, et nous avons donc une bifurcation fourche à  $\gamma = 1$ .
- **Case 2 :** Deux points d'équilibres apparaissent si  $0 < \gamma < 1$ .

La stabilité des points d'équilibre peut être déterminée en évaluant la matrice jacobienne sous la forme (19), puis en examinant ses valeurs propres (pour le cas 1 et 2).

$$J(0) = DF(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0) & -\delta & -1 \\ \alpha\gamma & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \quad (19)$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est donné par:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\alpha + \delta)\lambda^2 - (1 - \alpha\delta)\lambda - \alpha(1 - \gamma) = 0$$

Afin de calculer les limites de stabilité locales pour lesquelles la stabilité d'équilibre change, alors nous détectons les surfaces de bifurcation du système dynamique non linéaires en fonction des paramètres du système  $\delta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ , nous utilisons le critère Routh-Herwitz [10], [11].

Nous notons que dans cet intervalle  $\gamma \geq 1$ , nous avons deux limites de stabilité en fonction de l'ensemble des paramètres, la première est une  $\gamma = 1$ . la seconde peut être déterminée en appliquant **critère de Routh-Hurwitz**

on implique que pour  $\gamma > 1$  et  $\alpha\delta > 1$ , la deuxième limite de stabilité est donnée par

$$\gamma = \gamma_H = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$$

comportement du système au voisinage des deux points d'équilibres  $(P_+, P_-)$

l'application du **critère de Routh-Hurwitz** permet de définir une troisième limite de la stabilité dans l'intervalle  $0 < \gamma < 1$

While as  $\gamma$  is increased to pass  $\gamma_{H1}$ , Hopf bifurcation occurs, i.e. a family of periodic solutions bifurcate (bifurcating periodic solutions), small values of the  $\delta$  the damping constant ( $\alpha\delta < 1$ ).

l'approche analytique de la bifurcation donnant en fonction de tous les paramètres du système. l'analyse révèle des surfaces de bifurcation de Hopf (Fig. 15);

caractérisé par les équations  $\gamma = 1, \gamma = \gamma_{H1} = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$  avec  $\alpha\delta > 1$  et avec

$$\alpha\delta < 1 \text{ et } \gamma = \gamma_{H1} = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$$

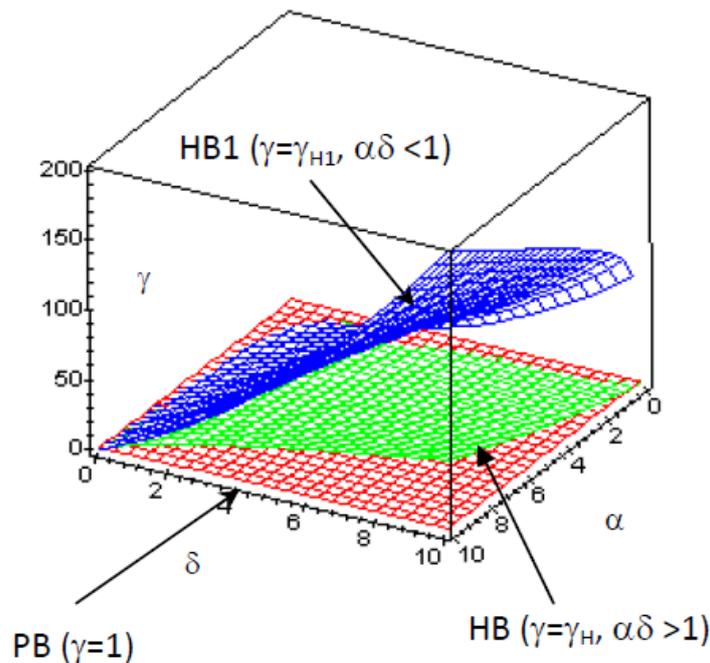


Fig.15 : la surface de bifurcation Hopf (HB), surface de bifurcation Hopf (HB1), et une surface de bifurcation (BP)

Les deux surfaces verte et bleue correspondent à des bifurcations de Hopf tandis que la surface rouge sera en général une bifurcation fourche ces bifurcation se produire si une valeur propre de la matrice jacobienne devient zéro. Une bifurcation Hopf double (DH) est formée à l'intersection de la surface de deux surfaces Hopf Nous pouvons voir que la ligne de cette intersection est caractérisée par la condition suivante:  $\gamma = \gamma_H = \gamma_{H_1} = 1$

ceci donne

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_H = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1) = 1 \Rightarrow \alpha\delta = 1 \\ \gamma = \gamma_{H_1} = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2) = 1 \Rightarrow \alpha\delta = 1. \end{cases}$$

on obtien  $\gamma = 1$  et  $\delta = \frac{1}{\alpha}$ , cette courbe d'intersection est visible sur la figure suivante:

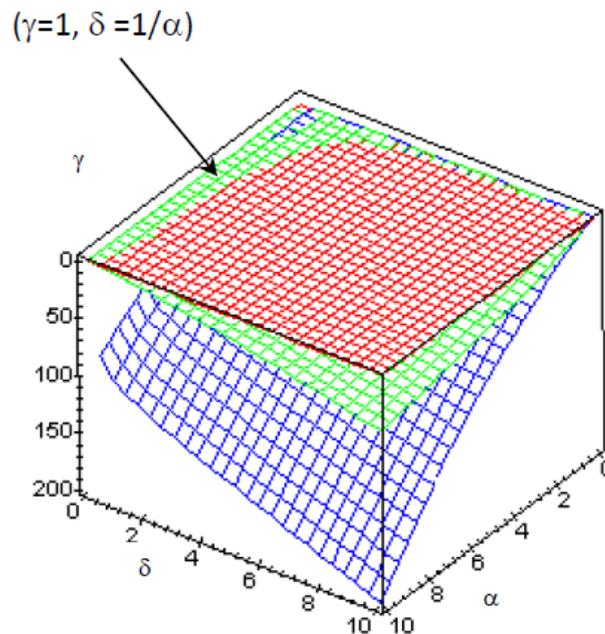


Fig.16 : l'inversion de la Fig .15 (une vue de l'intersection des trois surfaces de bifurcation)

### V.3 Analyse numérique par la méthode de Dérivation Optimale

Nous procédons à une simulation numérique du système de l'équation (18) en utilisant le dérivé optimale. la stabilité de chaque côté de la surface s'obtient en exécutant une simulation ou le calcul des valeurs propres de la matrice linéaire optimale numériquement en un point au voisinage de points d'équilibre de chaque côté de la surface.

Linearization around equilibrium state O (0, 0, 0) for  $\gamma \geq 1$  :

Dans cet intervalle il existe une valeur critique du paramètre bifurcation  $\gamma_H = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$ , on distingue deux intervalle de variation des paramètre on distingue deux intervalle de variation des paramètre selon  $\gamma_H$  comme suit :

$$\begin{cases} 1 < \gamma < \gamma_H \\ \gamma = \gamma_H \\ \gamma > \gamma_H > 1 \end{cases}$$

en utilisant une simulation numerique par la derivation optimale dans cette intervalle. pour l'application on choisi  $\alpha, \delta > 0$ , we take  $\alpha = 3; \delta = 2$  avec  $\alpha\delta > 1$ .

First we investigate :

cas où :  $\gamma = 1$  par un choix des conditions intiales au voisinge de l'origine  $(x_0, y_0, z_0) = (0.001, 0.02, 0.04)$ , la méthode de dérivation optimale donne ( $\varepsilon = 10^{-6}$ ) :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1.000 & -1.9999 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

ces valeurs propres sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1.537 \cdot 10^{-6} \\ \lambda_2 = -1.3819 \\ \lambda_3 = -3.6180. \end{cases}$$

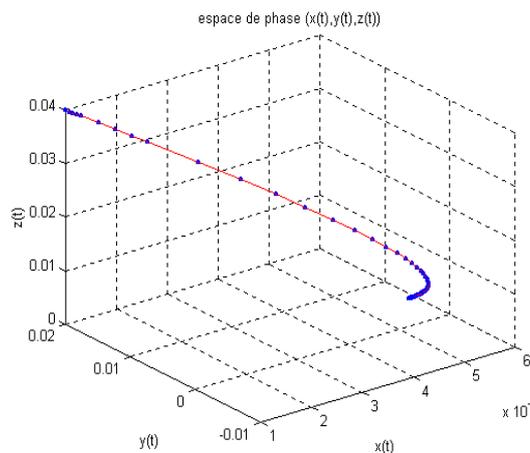


Fig 17: espace de phase pour  $(x_0, y_0, z_0) = (0.001, 0.02, 0.04)$

cas où  $1 < \gamma \leq \gamma_H$ : choisissons  $\gamma = 2$ , par un choix des conditions initiales

$(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$ , avec  $\alpha, \delta > 0$ ,  $\alpha = 3; \delta = 2$  with  $\alpha\delta > 1$

méthode de dérivation optimale donne ( $\varepsilon = 10^{-6}$ )

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.96 & -2.000 & -1.000 \\ 6.000 & 0 & -3.000 \end{bmatrix},$$

les valeurs propres

$$\begin{cases} \lambda_1 = -3.91329 \\ \lambda_{2,3} = -0.54599 \pm i 0.69505 \end{cases}$$

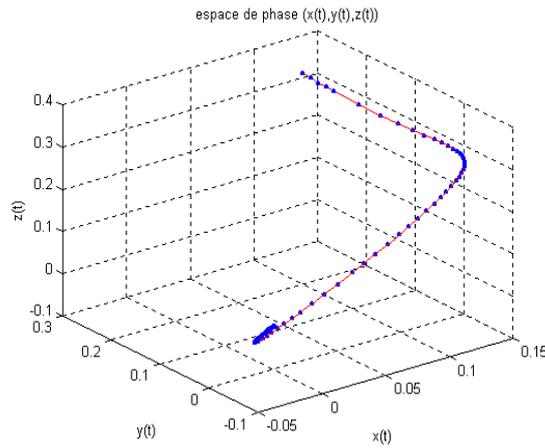


Fig 18: espace de phase pour  $(x_0, y_0, z_0) = (0.1, 0.2, 0.4)$

cas où  $\gamma = \gamma_H = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$  avec  $\alpha\delta > 1$ : par un choix des conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.02, 0.04)$  pour les paramètres  $\alpha = 3, \delta = 2, \gamma_H = 9.3333$  et  $\alpha\delta > 1$ , méthode de dérivation optimale donne ( $\varepsilon = 10^{-6}$ )

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.99988 & -2 & -1 \\ 28 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \text{ces valeurs propres sont} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -4.9999 \\ \lambda_{2,3} = -2.08 \cdot 10^{-5} \pm 2.2360i \end{cases}$$

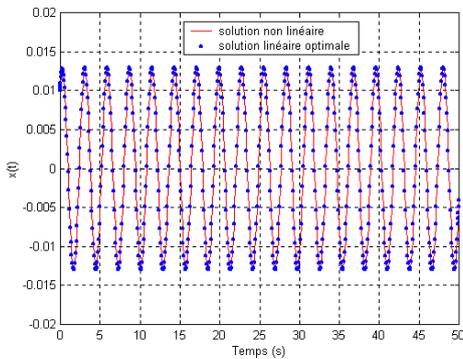


Fig 19:  $x(t)$  en fonction du temps  
Comparaison entre système linéaire et non linéaire  $\gamma_H = 9.3333$

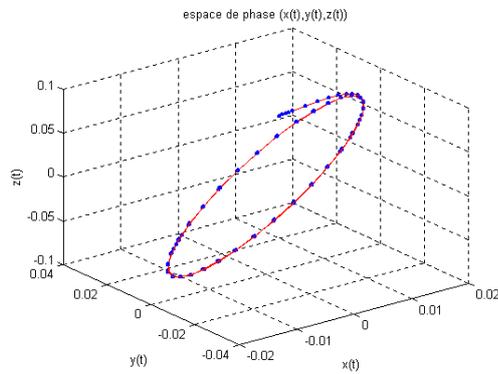


Fig 20: espace de phase  
Comparaison entre système linéaire et non linéaire  $\gamma_H = 9.3333$

**Linearization around the two equilibrium  $(P_+, P_-)$  in the range  $0 < \gamma < 1$**

Dans cet intervalle il existe une valeur critique du paramètre de bifurcation

$$\gamma_{H_1} = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$$

de même cet intervalle est divisé en trois intervalle selon le paramètre  $\gamma_{H_1}$

$$\begin{cases} 1 < \gamma < \gamma_{H_1} \text{ (} P_+, P_- \text{ sont asymptotiquement stable)} \\ \gamma = \gamma_{H_1} \text{ (Hopf bifurcation)} \\ \gamma > \gamma_{H_1} > 1 \text{ (} P_+, P_- \text{ sont instable).} \end{cases}$$

cas où  $\gamma < \gamma_{H_1} < 1$  :  $\alpha, \delta > 0$ , par un choix des paramètre

$\alpha = 0.4, \delta = 0.2$ , avec  $\alpha\delta < 1$ , et  $0 < \gamma < 1$ , pour  $\gamma = 0.3$

la méthode de dérivation optimale donne ( $\varepsilon = 10^{-6}$ )

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1.1990 & -0.16834 & -0.78085 \\ 0.27 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad \text{ces valeurs propres sont}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1.00565 \\ \lambda_{2,3} = -0.032716 \pm i 1.134068 \end{cases}$$

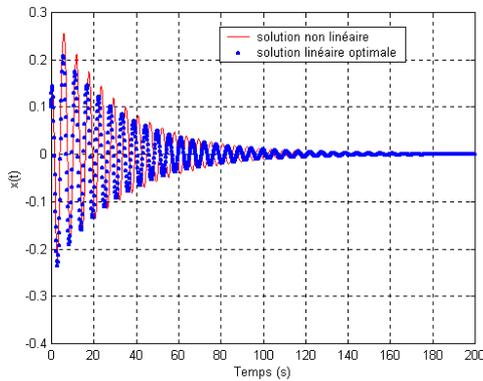


Fig 21:  $x(t)$  en fonction du temps  
Comparaison entre système linéaire et non linéaire  $\gamma = 0.3$

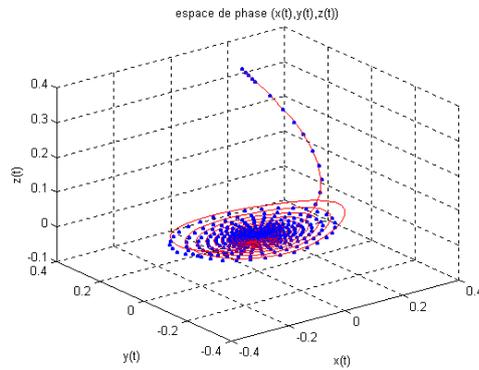


Fig 22: espace de phase  
Comparaison entre système linéaire et non linéaire  $\gamma = 0.3$

cas où  $\gamma = \gamma_{H_1}$  :  $\alpha = 0.9, \delta = 0.2$ , alors  $\gamma = \gamma_{H_1} = \frac{\delta}{\alpha + 3\delta}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2) = 0.3987$  et  $\alpha\delta < 1$ .

la méthode de dérivation optimale donne ( $\varepsilon = 10^{-6}$ )

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.80793 & -0.1963 & -0.98185 \\ 0.35879 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad \text{ces valeurs propres sont}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1.0963 \\ \lambda_{2,3} = 6.7886 \cdot 10^{-5} \pm i 0.99251 \end{cases}$$

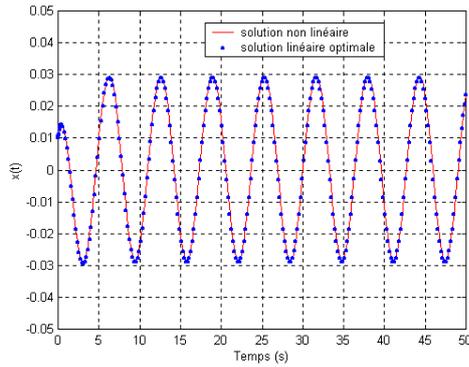


Fig 23:  $x(t)$  en fonction du temps  
 Comparaison entre système linéaire et non linéaire

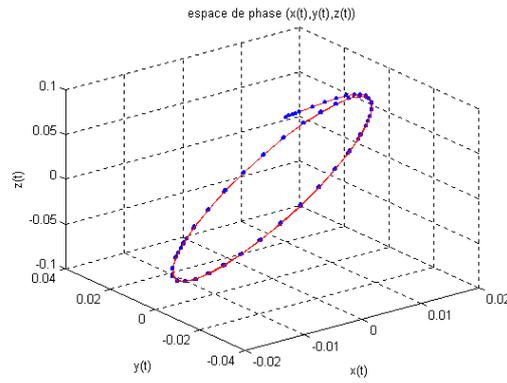


Fig 24: espace de phase  
 Comparaison entre système linéaire et non linéaire  $\gamma = \gamma_{H1} = 0.3987$

cas où  $\gamma > \gamma_{H1}$  :  $\gamma = \gamma_{H1} = 0.3987$ , on choisi  $\gamma = 0.6 > \gamma_{H1} = 0.3987$

la méthode de dérivation optimale donne ( $\varepsilon = 10^{-6}$ )

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.29003 & -0.1966 & -0.82834 \\ 0.54 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}, \quad \text{ces valeurs propres sont}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = -1.19490. \\ \lambda_{2,3} = 0.06261 - i \ 0.76820 \end{cases}$$

La partie réelle des deux valeurs propres  $\lambda_{2,3}$  est positive. le système linéaire optimale est instable et fait apparaître les deux point d'équilibre (P+,P-) comme un foyer instable. Tandis que l'origine est instable. Alors la méthode de dérivation optimale permet de détecter cette instabilité. On peut noter que les deux point (P+,P-) sont des foyer stable jusqu'à la valeur  $\gamma = \gamma_{H1} = 0.3987$ , valeur pour laquelle il deviennent des foyers instable. pour cette valeur critique les système subi une bifurcation Hopf subcritique en augmentant  $\gamma$ . les cycles limite instable seront absorbé par l'équilibre qui devient lui même instable.

#### V.4 discussion des Résultats

La stabilité de l'équilibre, et l'analyse de bifurcation locale du modèle, sont décrits. Nous allons discuter quelques résultats de base. Nous allons maintenant résumer et de comparer les résultats obtenus de l'analyse d'analyse afin de confirmer et de valider les résultats obtenus en utilisant la dérivée optimale. on peut déduire de la détermination des surfaces de bifurcation que les bifurcations de codimension supérieur peuvent facilement être décrites, une fois que les paramètres de bifurcation sont connues. Dans le diagramme de bifurcation de trois paramètres deux bifurcations apparaissent comme des lignes d'intersection des surfaces ( $\gamma=1$  et la constante de temps  $\delta = 1/\alpha$ ) (voir Fig 15 et 16 (HB, HB1) et PB Nous allons maintenant résumer les bifurcations locales du système non linéaire (18) en fonction du paramètres  $\gamma$ . L'origine est toujours un équilibre. les système subi Une bifurcation pitchfork ou fourch

$\gamma = 1$ , caractérisée par l'apparition de deux autres points d'équilibre symétriques  $(P_+, P_-)$  qui existent pour  $\gamma < \gamma_{H_1} < 1$ .

Le point d'équilibre trivial à l'origine subit une **bifurcation Hopf** dans l'intervalle  $1 < \gamma \leq \gamma_H$ .

Le principal événement dans cette intervalle est le comportement oscillatoire des solutions qui devient important en faisant croître la valeur du paramètre de bifurcation.

pour  $\gamma = \gamma_H$  l'amplitude des solutions devient de plus en plus faible, des orbites périodiques apparaissent (voir espace de phase Fig. 24) enfermant un équilibre stable.

pour  $\gamma > 1$ , il existe trois points d'équilibres, cette intervalle est caractérisé par le changement de la nature des points  $(P_+, P_-)$  de foyer stable en foyer instable pour la valeur critique  $\gamma = \gamma_{H_1} = 0.3987$  (résultats confirmés par la dérivée optimale) ce changement correspond au comportement oscillatoire des solutions en faisant croître la valeur de  $\gamma$  à partir de 1.

Dans cette plage de variation de  $\gamma$  il y a contraction des cycles limites instables autour de  $(P_+, P_-)$ , ces cycles traduisent l'apparition d'une deuxième bifurcation de Hopf à la valeur de  $\gamma = \gamma_{H_1}$ .

Enfin, les résultats montrent une bonne concordance entre l'analyse théorique et celle numérique réalisée à partir de la procédure de dérivée optimale (voir Figure 17-23). L'analyse qualitative montre que le système linéaire optimale permet de décrire le même comportement dynamique du système non linéaire initial en obéissant à sa dynamique non linéaire complexe.

**Conclusion :** la bonne utilisation des critères de Routh-Hurwitz et de la matrice linéaire classique du système linéaire ont été utilisés pour déterminer l'équation des surfaces de bifurcation dans l'espace des paramètres sous forme de polynômes homogènes des paramètres du système.

Elles permettent de calculer numériquement et de visualiser les surfaces de bifurcation locale d'une manière rapide et très efficace. La visualisation peut améliorer la compréhension qualitative du système. Un phénomène intéressant de bifurcation locale a été décrit à l'aide du système linéaire optimale associée avec le système d'origine non linéaire. La bifurcation et l'analyse de la stabilité à l'aide de cette nouvelle méthode numérique confirme les résultats obtenus par l'analyse en utilisant la linéarisation au sens de Fréchet du système non linéaire et les critères de Routh-Hurwitz qui présente un intérêt important pour la physique (circuit électronique). Il montre aussi sa capacité à être un outil puissant pour l'analyse de la stabilité de ce type d'équations différentielles ordinaires.

La méthode est applicable à des situations de bifurcation, dont celle de Hopf, est la plus importante. Ce type de bifurcations se produisent dans de nombreux systèmes physiques et jouent souvent un rôle important pour le comportement du système à long terme.

## V – Conclusion et Perspectives de Recherche

Ces travaux réalisés contribuent à la réflexion sur l'approximation des systèmes non linéaires et l'étude de leur stabilité. L'analyse du phénomène de bifurcation montre que même des problèmes physiques qui s'avèrent simples peuvent engendrer des phénomènes complexes, dont la maîtrise d'un outil numérique permettant de mieux décrire la dynamique du phénomène et de donner plus d'informations aux scientifiques (théoricien ou expérimentateur); est indispensable et cruciale.

notre objectif de mettre à la disposition de l'ingénieur actuellement un ensemble de méthodes et outils très différents, dont la méthode la plus simple consiste à linéariser le système non linéaire en utilisant la méthode de dérivation optimale surtout lorsque les autres méthode linéarisation tombent en défaut. En particulier, le but principale est de permettre au ingénieurs de réaliser pratiquement cette linéarisation dans différent domaine de la science .

l'analyse numérique par la méthode de la dérivée optimale des systèmes modélisant des problèmes physiques non linéaires et complexes montre son efficacité. Surtout si elle est couplée avec une bonne utilisation du critère de Routh Herwitz (son avantage est la détermination des limite de stabilité sans examiné les valeurs propres du système linéaire).

les modèles ratio-dépendant issue de la biologie, écologie, épidémiologie permettent d'illustrer l'efficacité la méthode de dérivation optimale et ses possibilité d'être un outil numérique de linéarisation puissant et promoteur dans le domaine de la dynamique de population.

il y a lieu de préciser que le travaux de recherches entrepris a ouvert une direction de recherche très intéressante qui mérite d'être approfondie, en particulier dans :

- l'Etude comparative entre Linéarisation par approximation locale basé sur la dérivée optimale et la méthode de lissage (linéarisation par morceaux) des circuit d'aspect non linéaire.
- Plusieurs développements futurs basés sur le code Auto2000 en autre :
  - \* Résolution des Equation Différentielle Partielle.
  - \* Continuation de bifurcation dans les modèles physique modélisés par des EDP.
  - \* Analyse de bifurcation des modèles de la dynamique de population.
- Concernant l'application de la méthode de dérivation optimale aux modèles ratio-dépendant, on recommande d'approfondir et de développer l'aspect théorique en collaboration avec d'autre équipes de recherche travaillant sur le même thème.
- L'étude approfondie sur le plan mathématique de l'application de la méthode aux problèmes avec bifurcation.
- Approfondir l'étude de stabilité des système s'équation différentielle avec commande.
- L'application de cette technique aux équation différentielle avec commande en approfondissant son utilisation dans le domaine du contrôle et l'automatique.

## Vii – Références

- [1] N. Rouche, J. Mawhin, (1973), Equations Différentielles Ordinaires, Tome I, Théorie Générale, Masson et Cie.
- [2] N. Rouche, J. Mawhin, (1973), Equations Différentielles Ordinaires, Tome II, Stabilité et Solutions Périodiques, Masson et Cie.
- [3] E. A. Coddington and Levinson (1955), Theory of ordinary differential equations, Mc Graw-Hill.
- [4] J. Hale, (1969) , Ordinary differential equations, Springer Verlag.

- [5] V. Arnold, (1974), Equations Différentielles Ordinaires, Editions Mir. Moscou.
- [6] H. Leipholz, (1970), Stability Theory, An Introduction to the Stability of Dynamical Systems and Rigid Bodies. Academic Press.
- [7] T. Benouaz and O. Arino, (1998) . Optimal Approximation of the Initial Value Problem, Computers Math. Applic. vol. 36, N°1, pp.21-32.
- [8] T. Benouaz et O. Arino, (1995) . Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N0.95/10.
- [9] T. Benouaz et O. Arino, (1995) . Existence, Unicité et Convergence de l'Approximation au Sens des Moindres Carrés d'une Equation Différentielle Ordinaire Non-Linéaire, 94/14 Université de Pau, CNRS URA 1204.
- [10] T. Benouaz and O. Arino, (1995) . Determination of the Stability of a Nonlinear Ordinary Differential Equation by Least Square Approximation. Computational Procedure, Appl. Math. and Comp. Sci., N° 1, Vol. 5, pp 33-48.
- [11] T. Benouaz, (13 – 17 August 1995). Least Square Approximation of a Nonlinear Ordinary differential Equation : The Scalar Case, Proceeding of the Fourth International Colloquium on Numerical Analysis pp. 19-22 , Plovdiv, Bulgaria.
- [12] **A.CHIKHAOUI** (1996), Etude théorique de la propagation d'une impulsion laser dans un milieu dispersif, mémoire de D.E.S, Tlemcen.
- [13] **A.CHIKHAOUI** (2000), Contribution à l'étude des systèmes Non linéaires, thèse de magister, Tlemcen.
- [14] T. Benouaz, (1996). Contribution à l'Approximation et la Synthèse de la Stabilité d'une Equation Différentielle Ordinaire Non Linéaire, Thèse de Doctorat d'état, Tlemcen.
- [15] **A. CHIKHAOUI**, (2009), Relation entre la Dérivée Optimale et la Stabilité Asymptotique , these de doctorat, Université de Tlemcen.
- [16] N.F. Rulkov; L.S. Tsimring; H. D. I. Abarbanel, (1994), Tracking Unstable Orbits in Chaos using dissipative feedback control, Physical review E, Vol. 50, N°1.
- [17] E.J. Doedel. et al.(2000) AUTO 2000 : Continuation and bifurcation software for Ordinary differential Equations (with HomCont), Concordia University, Montreal, Canada
- [18] T. Benouaz, Martin Bohner, **A.CHIKHAOUI**, 2009, On The Relationship between the optimal Derivative and asymptotique Stability, African Diaspora Journal of Mathematics, Volume8, Number 2, pp.148-162.
- [19] T. Benouaz et O. Arino, (1995) . Relation entre l'Approximation Optimale et la Stabilité Asymptotique, Publications de l' U.A, CNRS 1204, N0.95/10.
- [20] Vujanovic B., (1973), Application of the optimal linearization method to the heat transfer problem, International journal heat mass transfer, Vol. N°16, , pp.1111-1117.
- [21] Jordan A., Benmouna M., Bensenane A., Borucki A., (1987), Optimal linearization method applied to the resolution of state equation, RAIRO-APII, Vol. N°21, pp.175-185.
- [22] Jordan A., Benmouna M., Bensenane A., Borucki A., (1987), Optimal linearization of nonlinear state equation, RAIRO-APII, Vol. N\_21, , pp.263-271.

- [23] **A. CHIKHAOUI**, T. Benouaz and A.Cheknane, June 2009, Computational Approach of the Optimal Linearization of the Nonlinear O.D.E: Application to Nonlinear Electronic Circuit International Journal of Computer and Electrical Engineering, Vol. 1, No. 2, , 1793-8198.
- [24] T. Benouaz and F. Bendahmane , (2004), " Least square Approximation of a Nonlinear O. D.E with Excitation", Computers & Mathematics With Applications, vol.47, Issues 2-3, pp. 473-489.
- [25 ] H.R.Akçakaya, R.Arditi, L.R Ginzburg. (1995). Ratio-dependent predation: an abstraction that works, Ecology, 76, 995-1004.
- [26] R.Arditi, L.R.Ginzburg. (1989). Coupling in predator-prey dynamics: ratiodependence, J.Theor. Biol. 139, 311-326.
- [27 ] Tzy-Wie Hwang, Yang Kuangy, Extinction Effect of Parasites one Host Populations, AMS-MOS Mathematic Subject Classification (2000).
- [28] Dongmei Xiao, Shigui Ruan Global dynamics of has ratio-dependent predator-prey system, J Math. Biol. 43, 268 -290 (2001)
- [30] F. Berezovskaya, G. Karev, R. Arditi, (1989) . Parametic analisis of the Ratio-Dependent Predator-Prey model, Institut national agronomique Paris-Grignon, Ecologie des populations et communautés, Accepted for publication in The Journal of Mathematical Biology November 2000.